

Pružnost

- Pružné deformace (pružiny, podložky)
- Tuhost systému (nežádoucí průhyb)
- Kmitání systému (vlastní frekvence)

R. Hook: „ut tensio, sic vis“ (1676)



Tacoma Bridge Collapse



- 1) Modul pružnosti
- 2) Vazby mezi atomy
- 3) Uspořádání atomů v tuhých látkách
- 4) Fyzikální základ modulu pružnosti
- 5) (Příklad návrhu konstrukce s uvážením elastických deformací)

- ❑ Elastické charakteristiky materiálu
- ❑ Měření elastických charakteristik
- ❑ Hodnoty modulu E

Zobecněný Hookův zákon

Anisotropní materiál (Anisotropie = závislost fyzikálních vlastností látek na směru, ve kterém se měří)

Tensor deformací

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Elastické koeficienty

Tensor napětí

Matice sice obsahuje 36 prvků, ale díky symetrii indexů je pouze 21 nezávislých

Zobecněný Hookův zákon

Se zvyšováním symetrie (zavádíme osy x,y,z) se
snižuje počet nezávislých elastických koeficientů



Orthotropní materiál

Orthotropie = pravoúhlá anisotropie

- Monokrystal, textura
- Kompozit – matrice + vlákno
(zanedbáváme osu „z“)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E_x}, -\frac{\mu_{yx}}{E_y}, -\frac{\mu_{zx}}{E_z}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu_{xy}}{E_x}, \frac{1}{E_y}, -\frac{\mu_{zy}}{E_z}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu_{xz}}{E_x}, -\frac{\mu_{yz}}{E_y}, \frac{1}{E_z}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{G_{yz}}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{G_{zx}}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{G_{xy}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E_x}, -\frac{\mu_{yx}}{E_y}, 0 \\ -\frac{\mu_{xy}}{E_x}, \frac{1}{E_y}, 0 \\ 0, 0, \frac{1}{G_{xy}} \end{array} \right\} * \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}$$

Zobecněný Hookův zákon

Orthotropní materiál

monokrystaly

a) Al (lom. napětí)

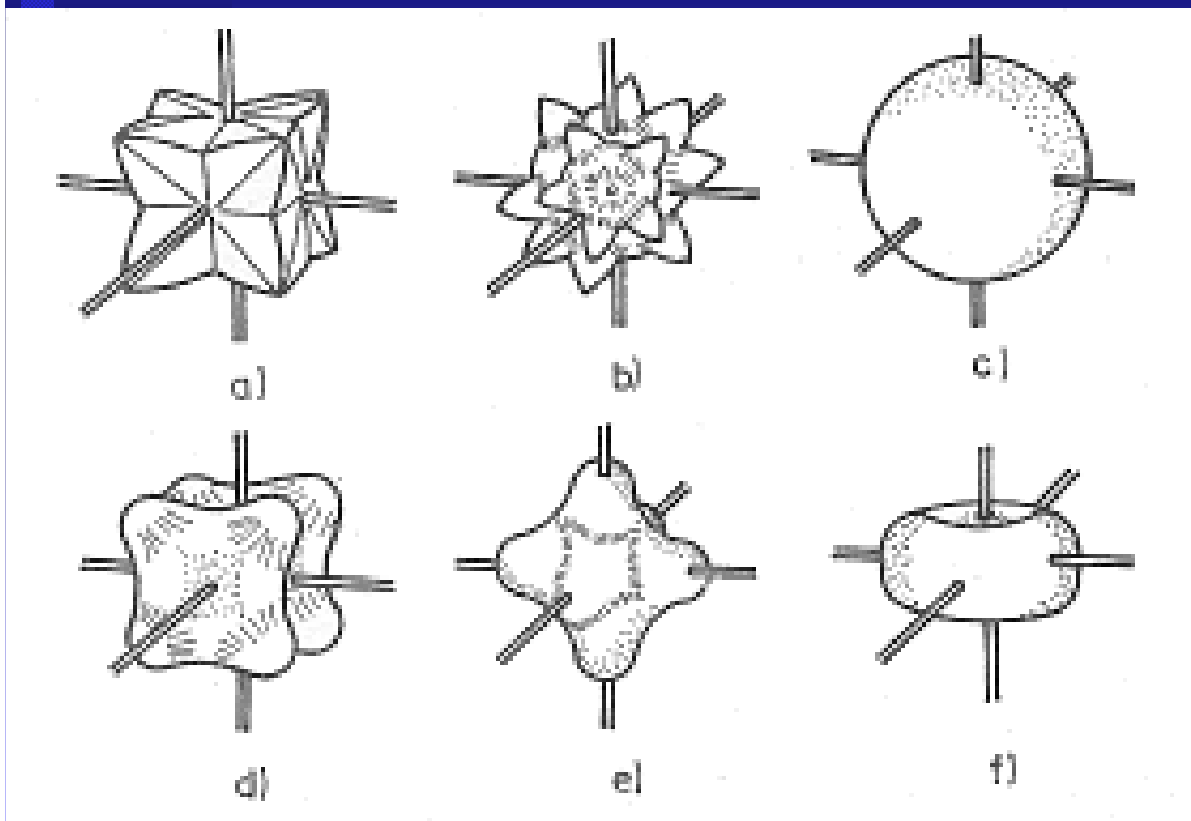
b) Al (tažnost)

c) Al (E)

d) Fe (E)

e) Fe (G)

f) Mg (E)



Isotropní materiál

Zobecněný Hookův zákon

Isotropie = vlastnosti jsou na směr
nezávislé (opak anisotropie)

**Polykrystalické materiály – kov,
keramika částečně i polymery**

Amorfní látky – sklo, některé polymery

**JEN DVĚ NEZÁVISLÉ
CHARAKTERISTIKY**

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E}, -\frac{\mu}{E}, -\frac{\mu}{E}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu}{E}, \frac{1}{E}, -\frac{\mu}{E}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu}{E}, -\frac{\mu}{E}, \frac{1}{E}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{\mathbf{G}}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\mathbf{G}}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\mathbf{G}} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{\mathbf{G}} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{\mathbf{G}} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{\mathbf{G}} \end{aligned}$$

Další elastické charakteristiky, jen dvě jsou nezávislé

$$\sigma = E \varepsilon$$

modul v tahu

$$\tau = G \gamma$$

modul ve smyku

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}$$

objemový modul

$$\mu$$

Poissonův poměr

**Další elastické charakteristiky,
jen dvě jsou nezávislé**

$$E = 2G(1 + \mu)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1$$

Další elastické charakteristiky, jen dvě jsou nezávislé

Isotropní materiál: μ a E

Poissonův poměr μ – poměr poměrného příčného zkrácení k poměrnému podélnému prodloužení v oblasti pružných deformací.

Hodnota μ vyjadřuje pružnou stlačitelnost tělesa t. j. schopnost zmenšovat (při stlačení), nebo zvětšovat (při tahu) svůj objem během pružné deformace.

Otázka zvědavého studenta

Proč se pro oceli uvádí vždy hodnota $\mu = 0,33$?

Definire μ

$$\mu = \left| \frac{\Delta d / d_0}{\Delta l / l_0} \right| = - \frac{\Delta d / d_0}{\Delta l / l_0} = - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = -\mu \varepsilon_1$$

Definice μ

Jaké hodnoty μ nabývá?

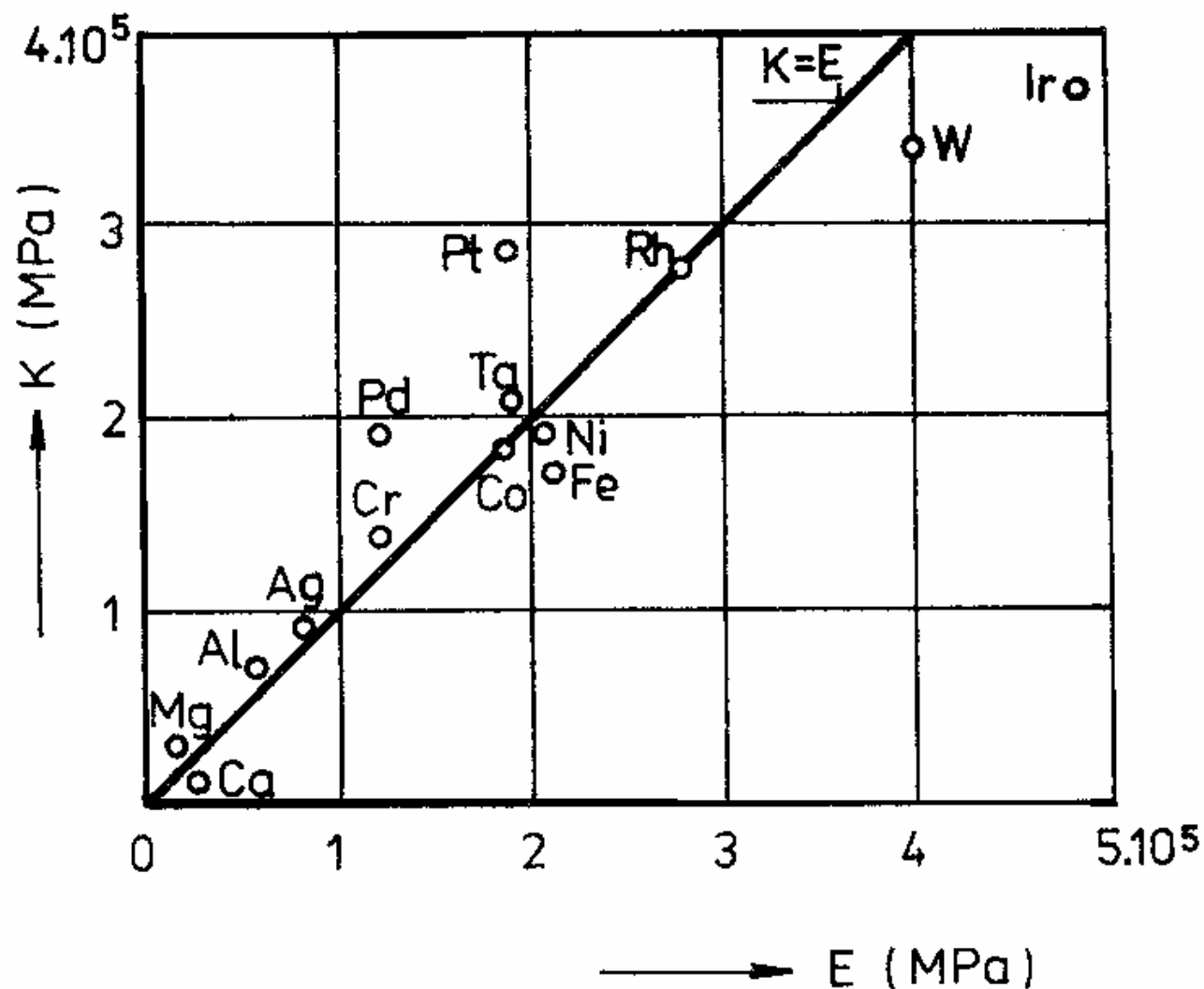
$$\begin{aligned}(1 + \Delta V) &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = \\ &= (1 + \varepsilon_1)(1 - \mu\varepsilon_1)(1 - \mu\varepsilon_1) = \\ &\left\{ \text{zanedbáme členy s } \varepsilon^2, \varepsilon^3 \right\} \\ &= 1 + \varepsilon_1(1 - 2\mu)\end{aligned}$$

Objem roste $\Rightarrow \Rightarrow 1 - 2\mu > 0 \Rightarrow \Rightarrow \mu < 0,5$

Objem je konstantní $\mu = 0,5$

Vztah mezi K a E

K je u kovů prakticky rovno E



Jakých hodnot nabývá μ u kovů?

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$E \approx K$$

$$1 = 3(1-2\mu)$$

$$\mu = 0,33$$

$$G = \frac{3}{8}E$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} = 200 \text{ GPa}$$

$$G = 7,5 \cdot 10^4 \text{ MPa} = 75 \text{ GPa}$$

Měření elastických charakteristik

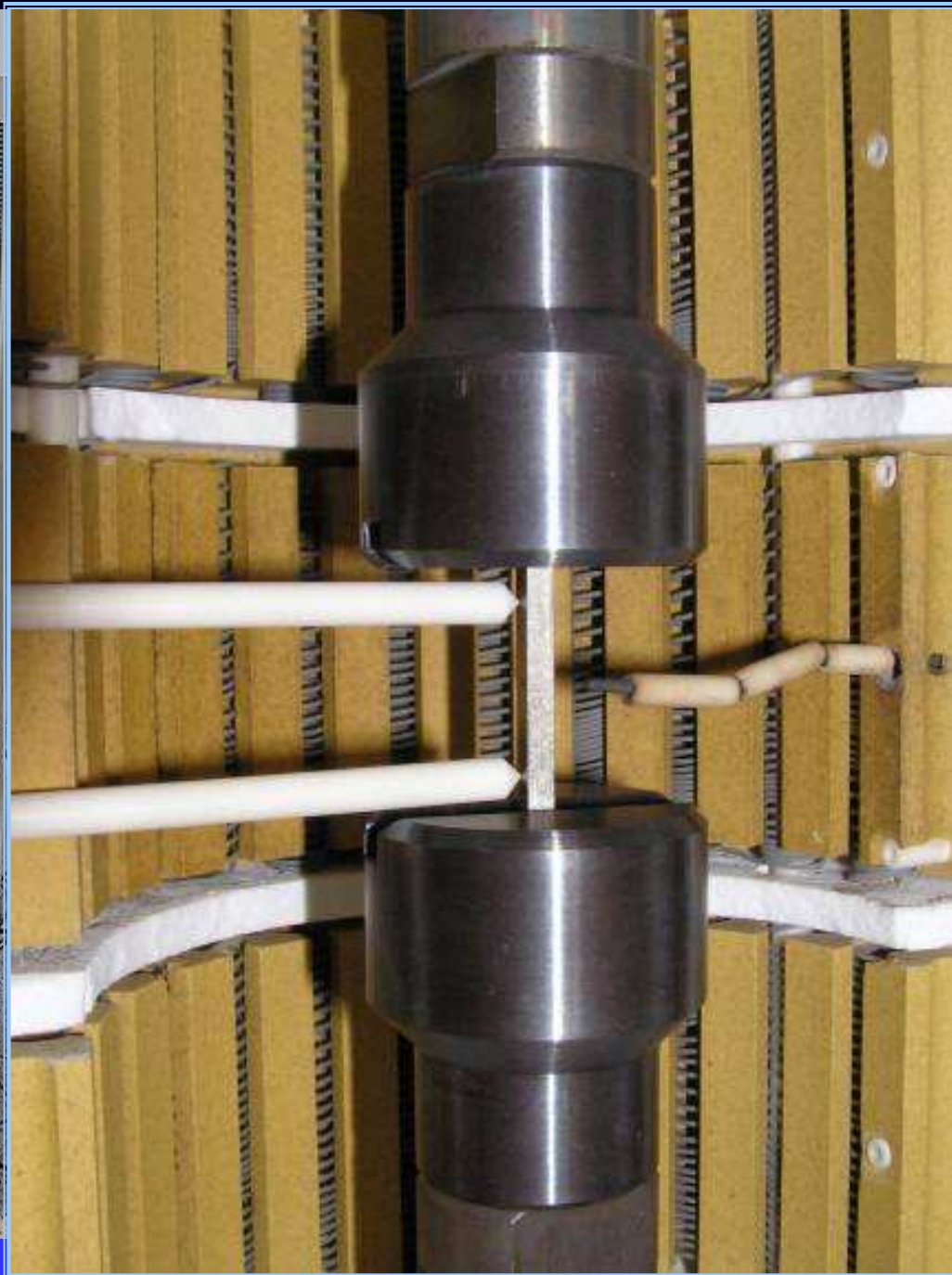
- Kvazistatické metody (pomalé)
- Dynamické metody

nízkofrekvenční

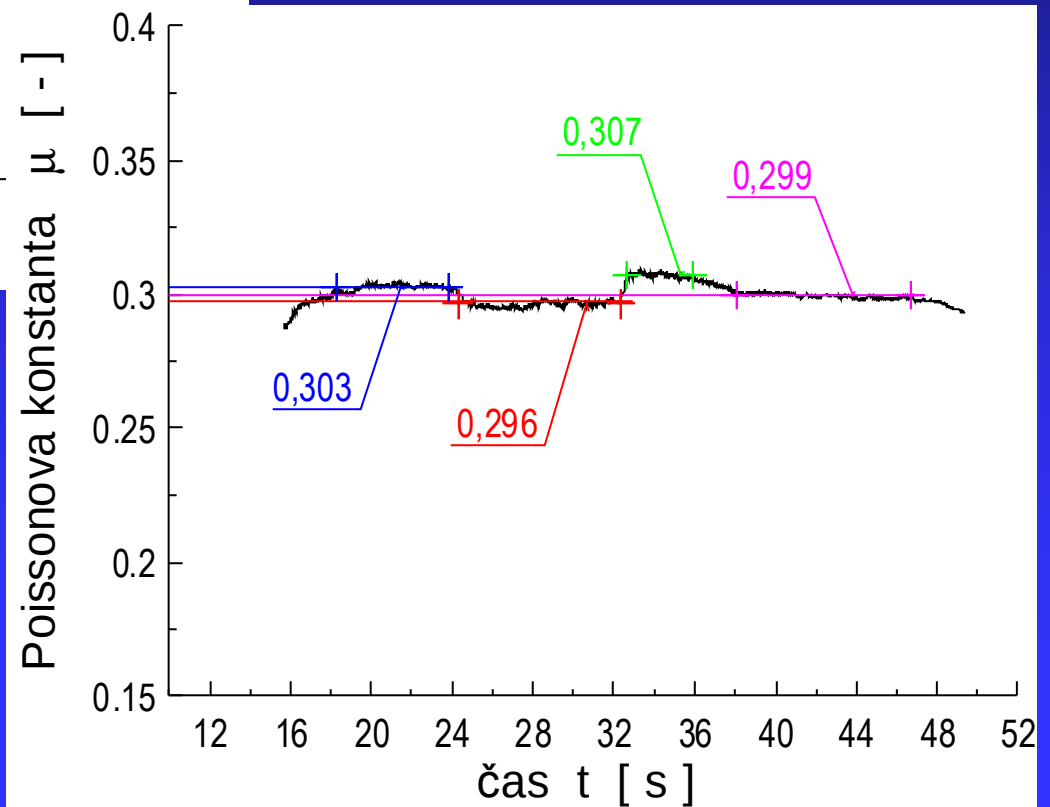
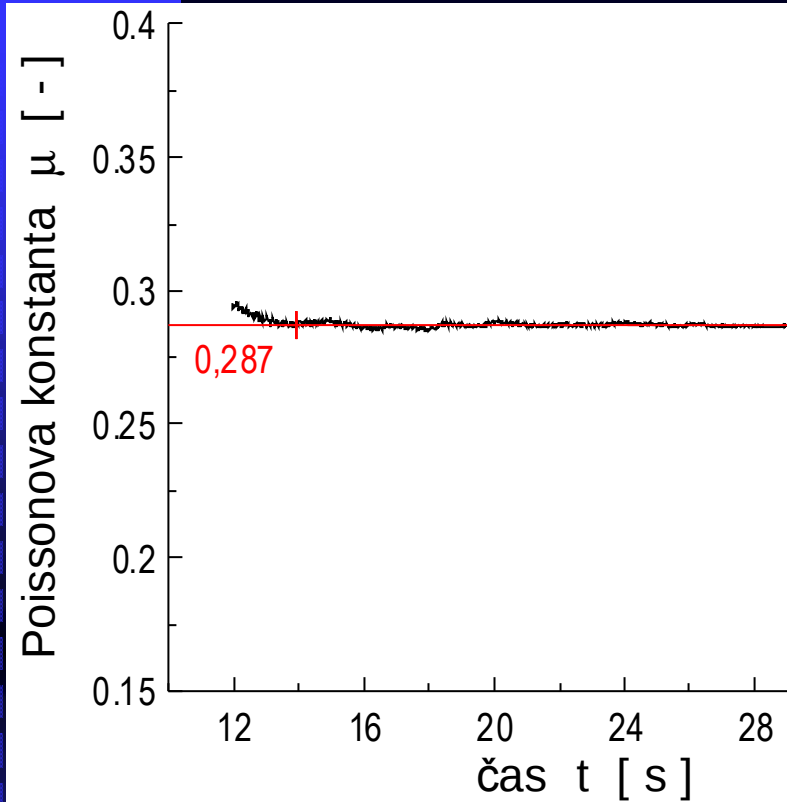
vysokofrekvenční

Kvazistatické metody

- ❑ Poissonův poměr – z definice; tenzometry
příp. snímače podélného prodloužení a
příčného zúžení
- ❑ Modul E – zkouška tahem
– zkouška ohybem
- ❑ Modul G – zkouška krutem



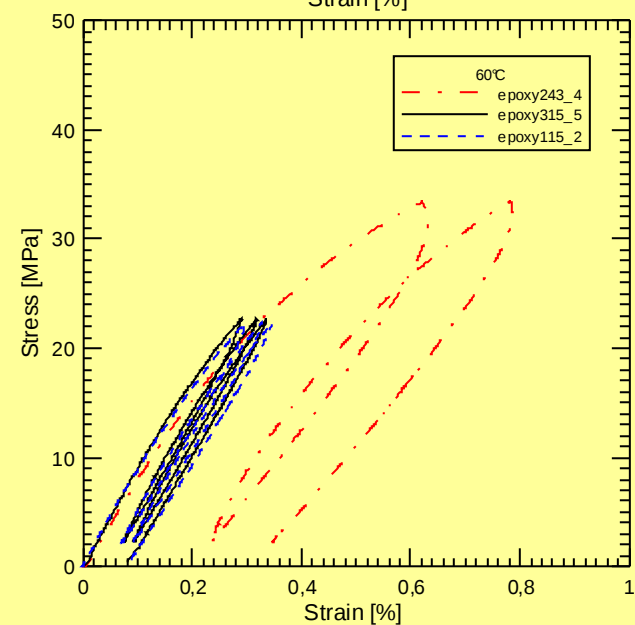
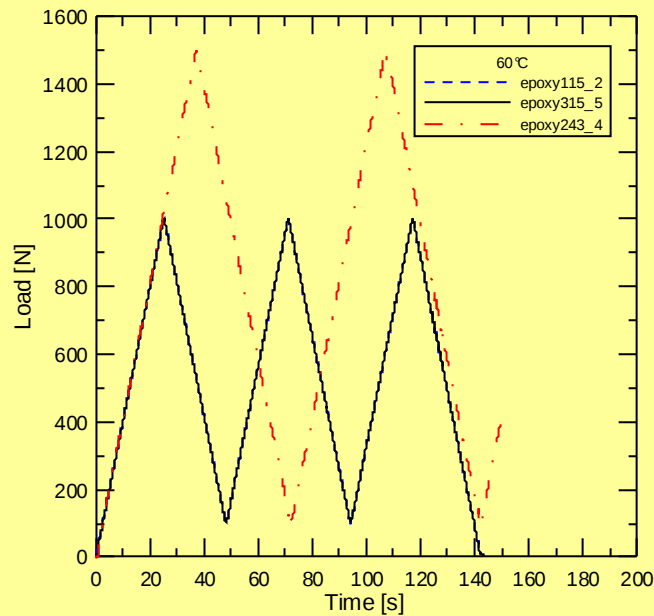
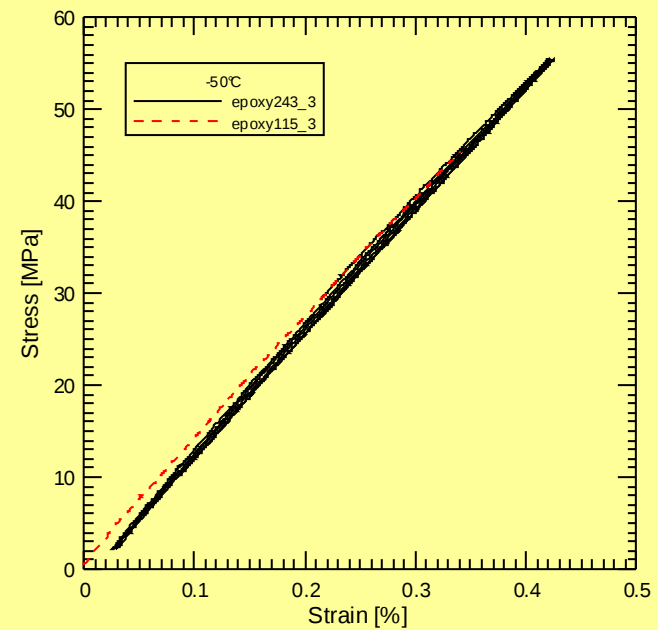
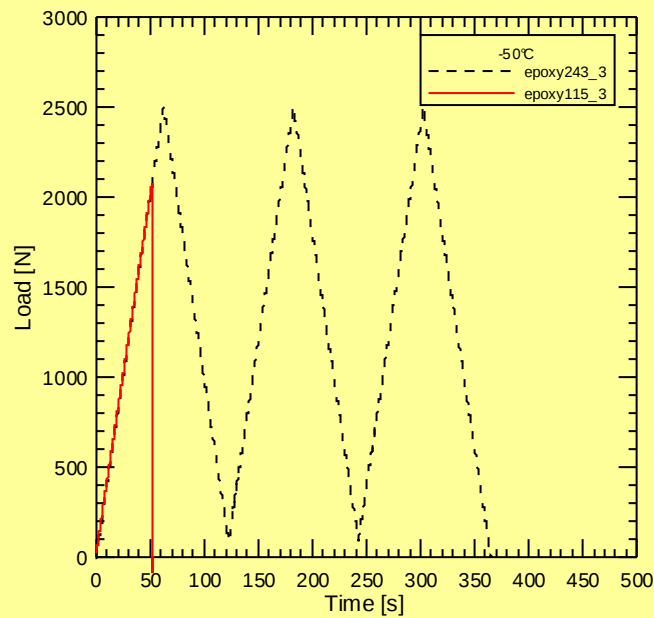
Kvazistatické metody



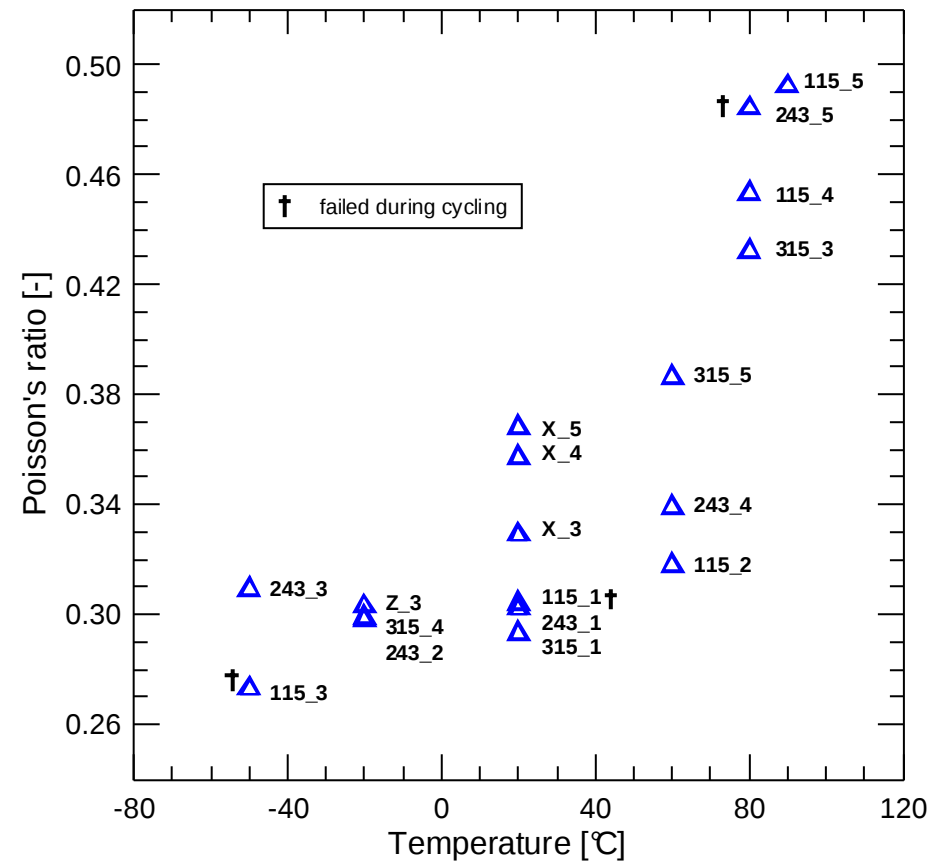
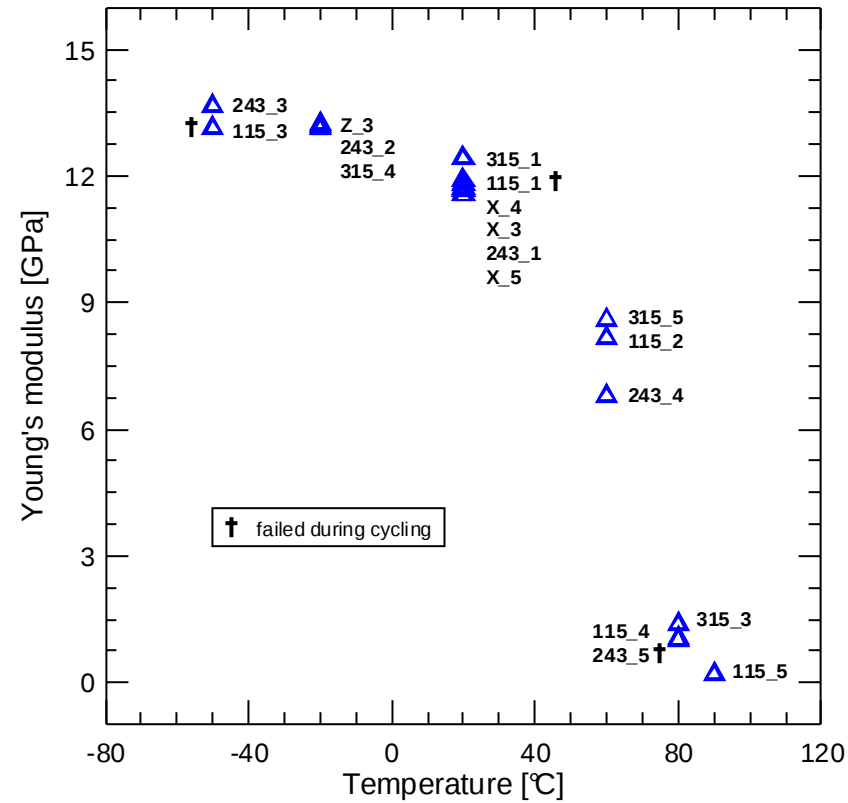
Kvazistatické metody



Kvazistatické metody



Kvazistatické metody



Torzní kyvadlo

Dynamické metody

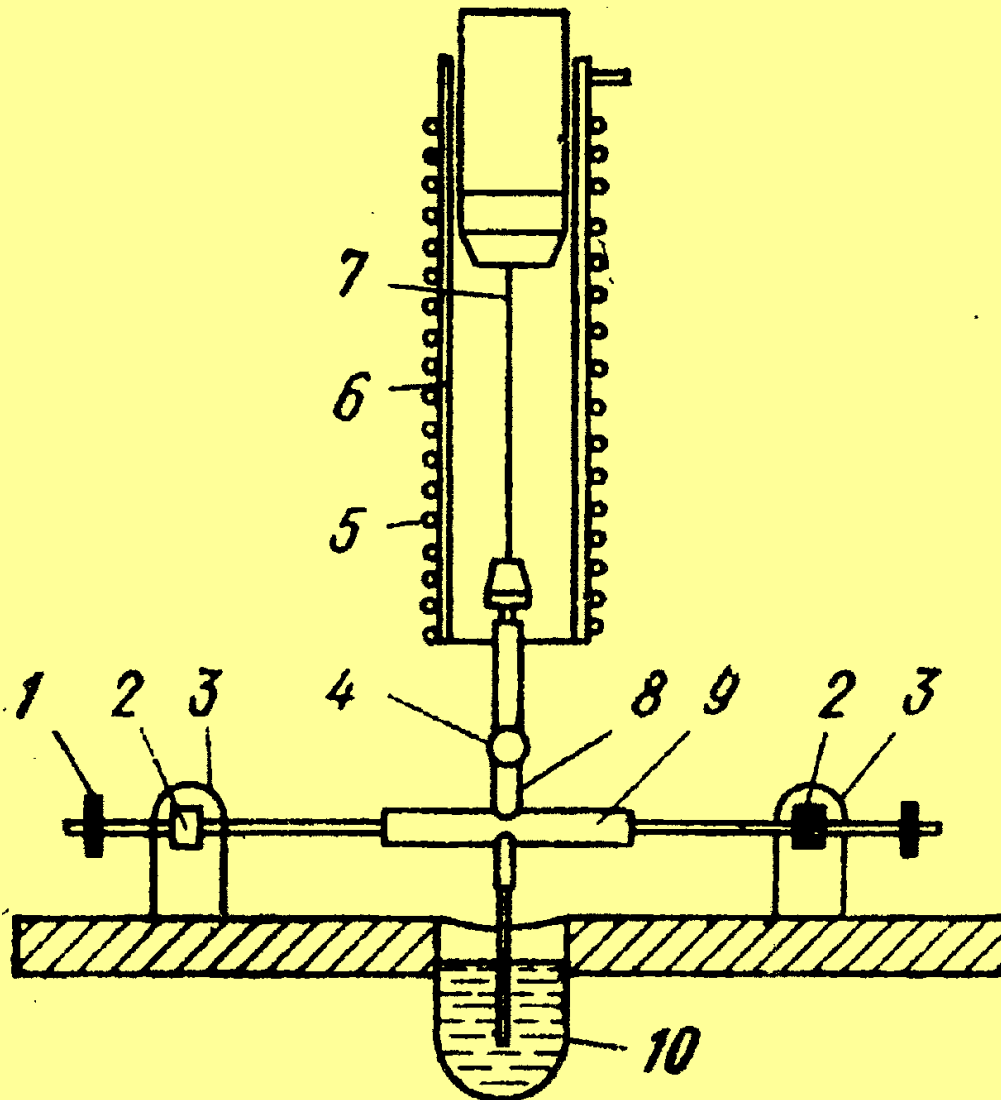
$$G = 128\pi.J_a.l.f^2/d^4$$

d - průměr vzorku

l - délka vzorku

J_a - osový moment
setrvačnosti

f - vlastní frekvence
kmitů kyvadla



Dynamické metody - vysokofrekvenční

$$v_D = (E/\rho)^{1/2} \quad \text{rychlost šíření podélných vln}$$

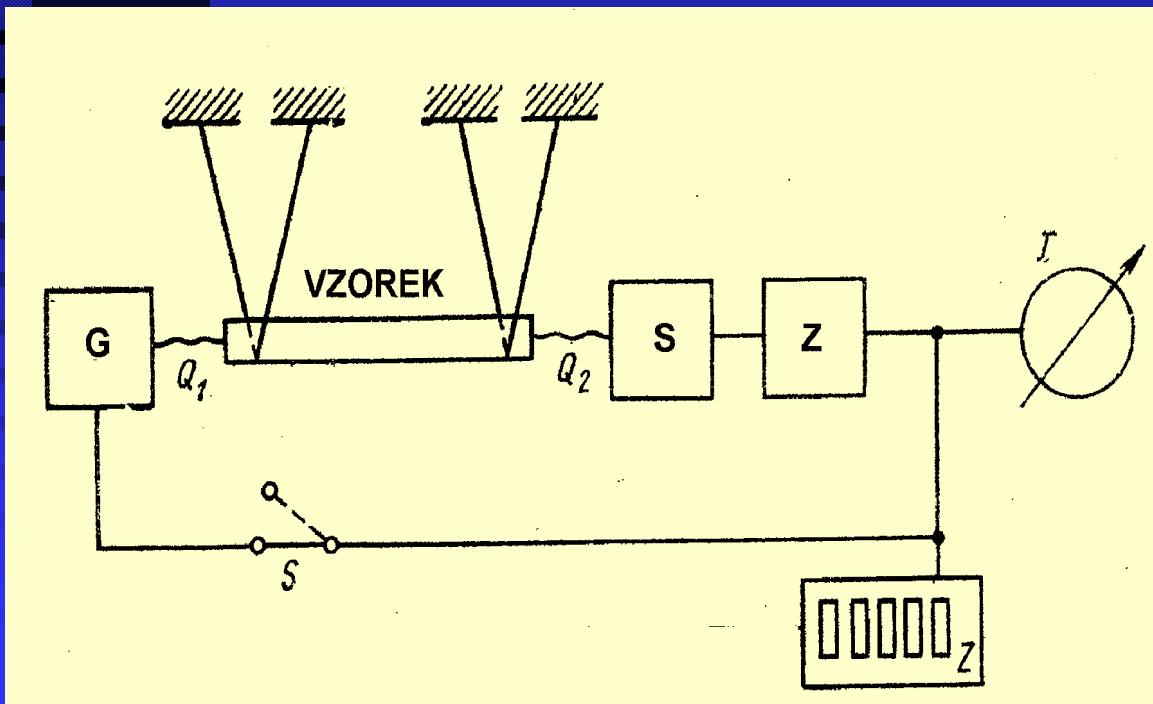
Pro těleso délky l_0 , vlastní frekvencí kmitů f a n -tou harmonickou vlnu platí:

$$v_{Dn} = 2l_0 f_n / n, \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

Potom:

$$E = 4 \cdot l_0^2 \cdot \rho \cdot f_n^2 / n^2$$

Grindosonic



Měření elastických charakteristik

Mezi hodnotami E určenými při pomalém a rychlém zatěžování jsou rozdíly (asi 10% u kovů, keramiky; u plastů může být i několik řádů)

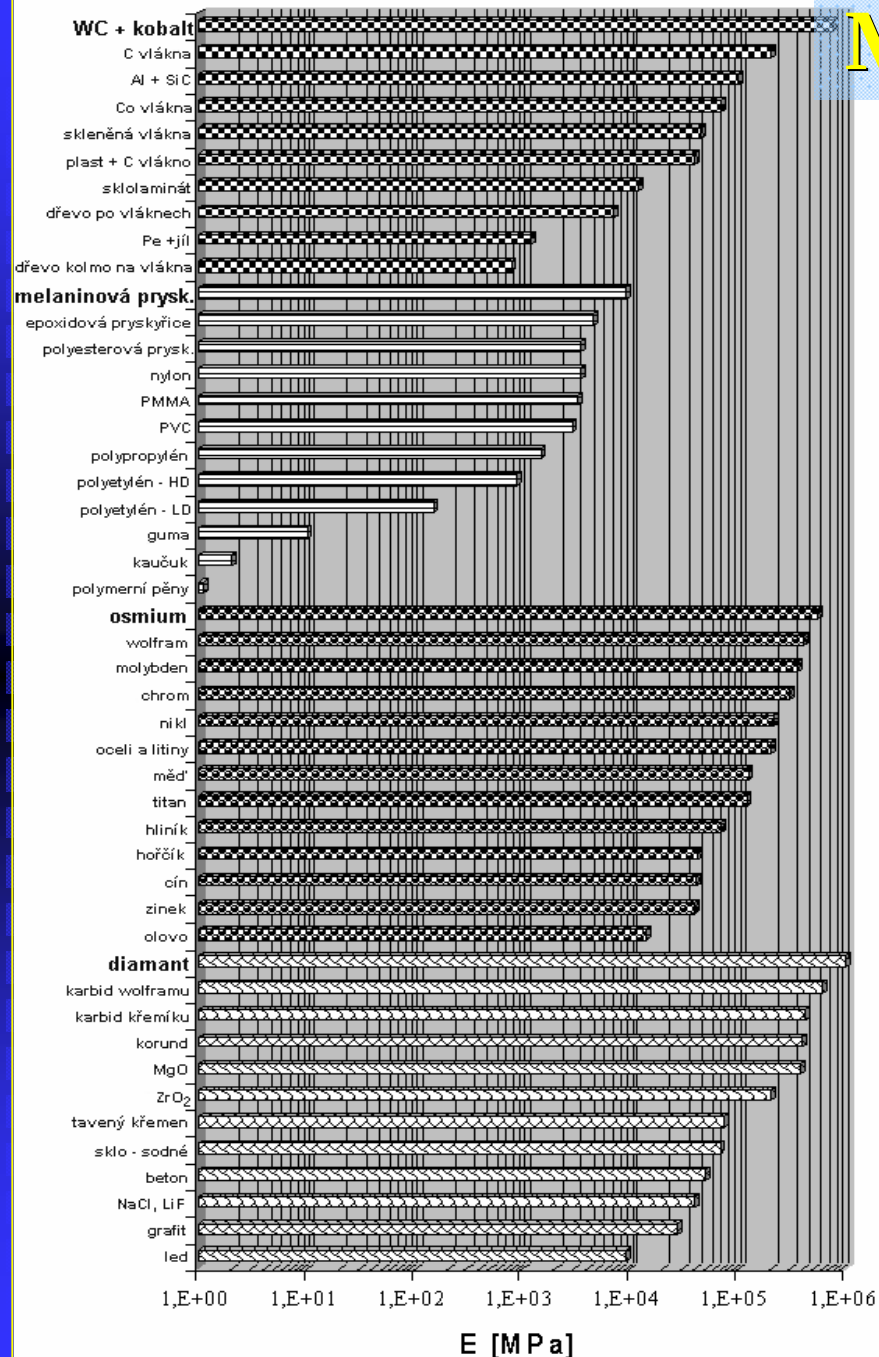
Moduly pružnosti materiálů

KOMPOZITY

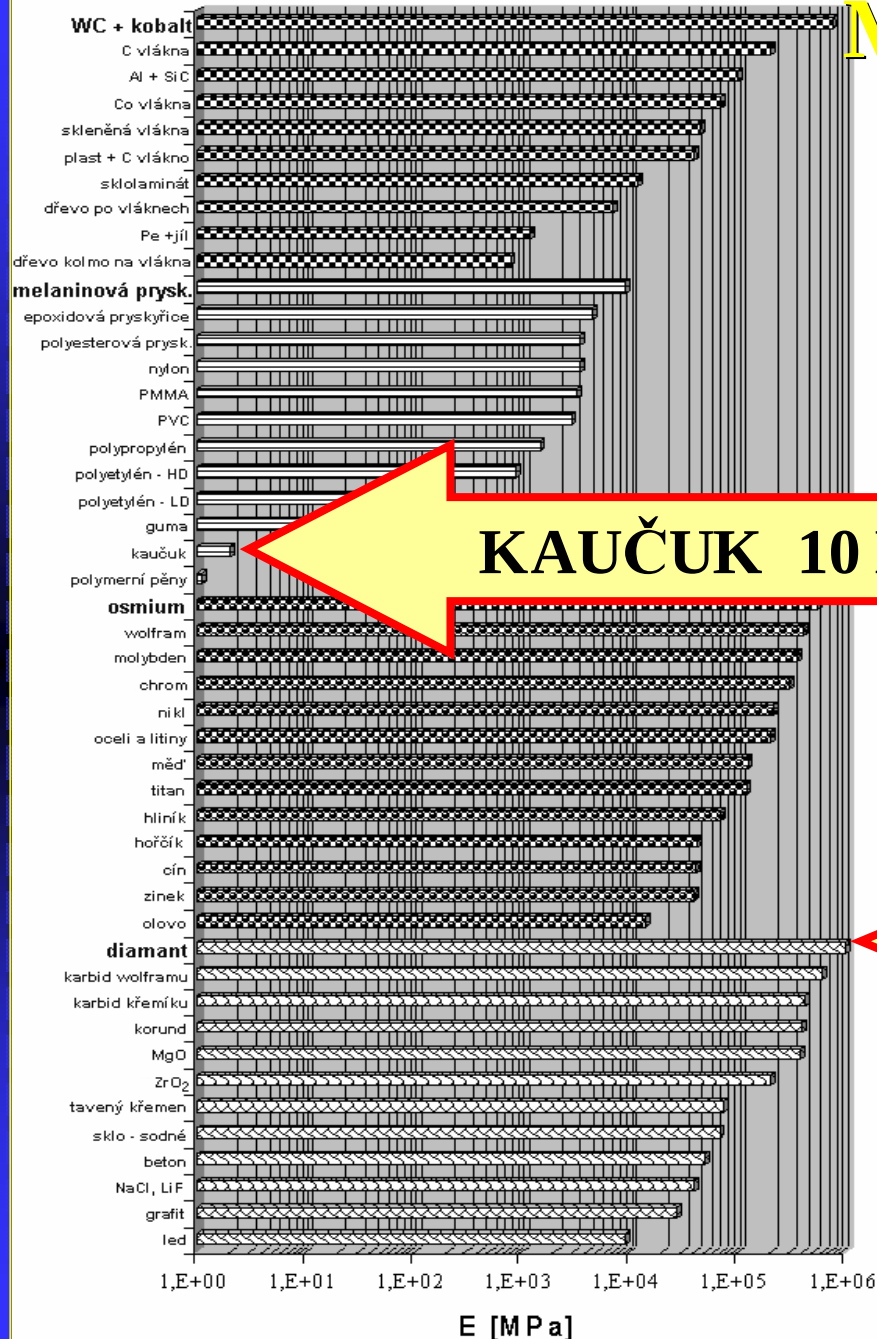
POLYMERY

KOVY

KERAMIKA



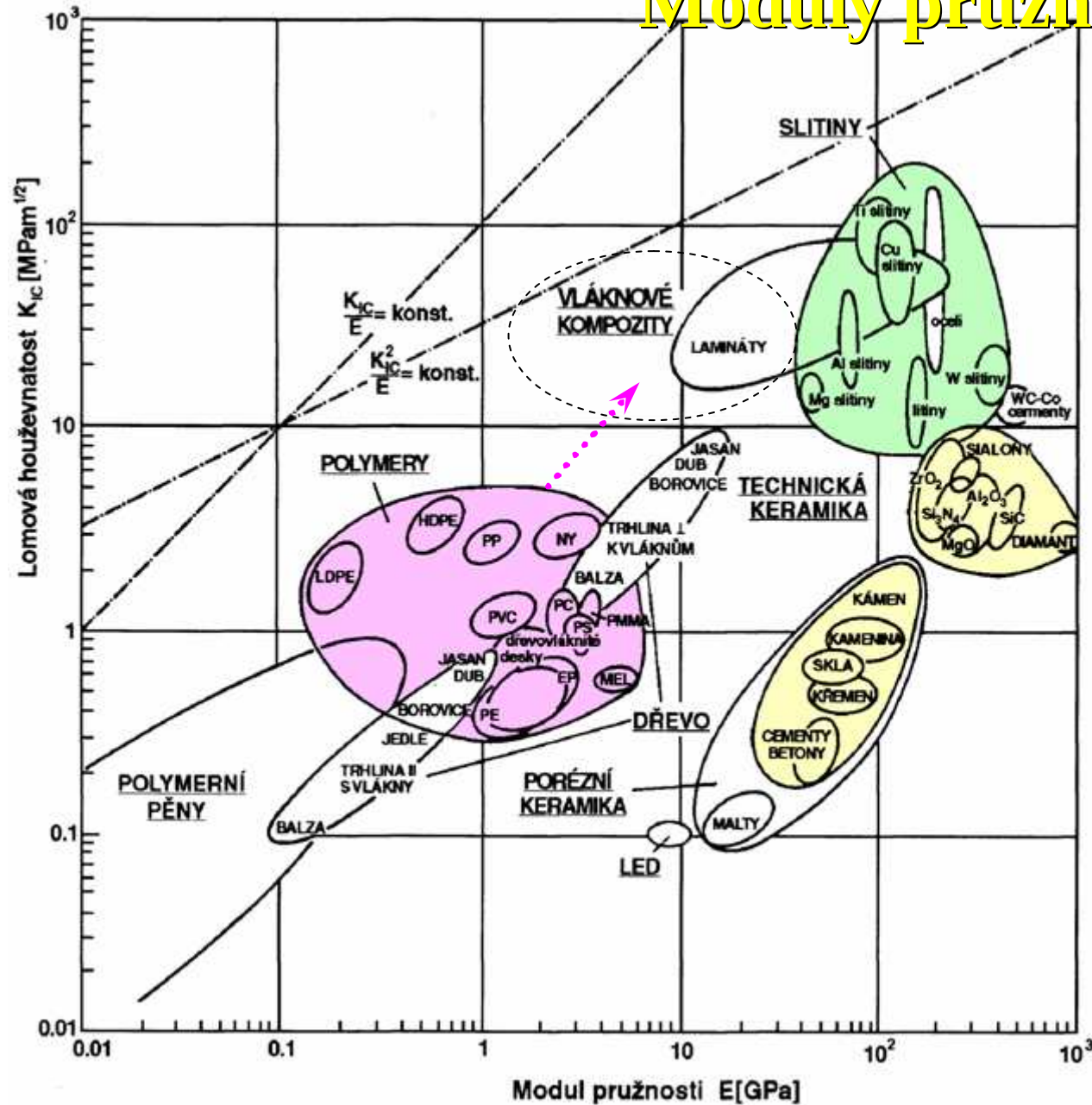
Moduly pružnosti materiálů



KAUČUK 10 MPa

DIAMANT 1 000 000 MPa

Moduly pružnosti materiálů



Moduly pružnosti materiálů

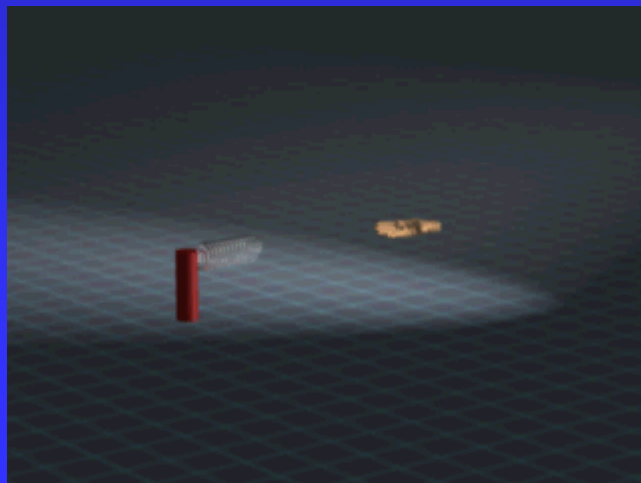
kovy, keramika, skla $(10^4 \text{ až } 10^6) \text{ MPa}$

plasty $(1 \text{ až } 10^4) \text{ MPa}$

elastická deformace

závislost modulu na

- vazbách mezi atomy
- uspořádání atomů v prostoru

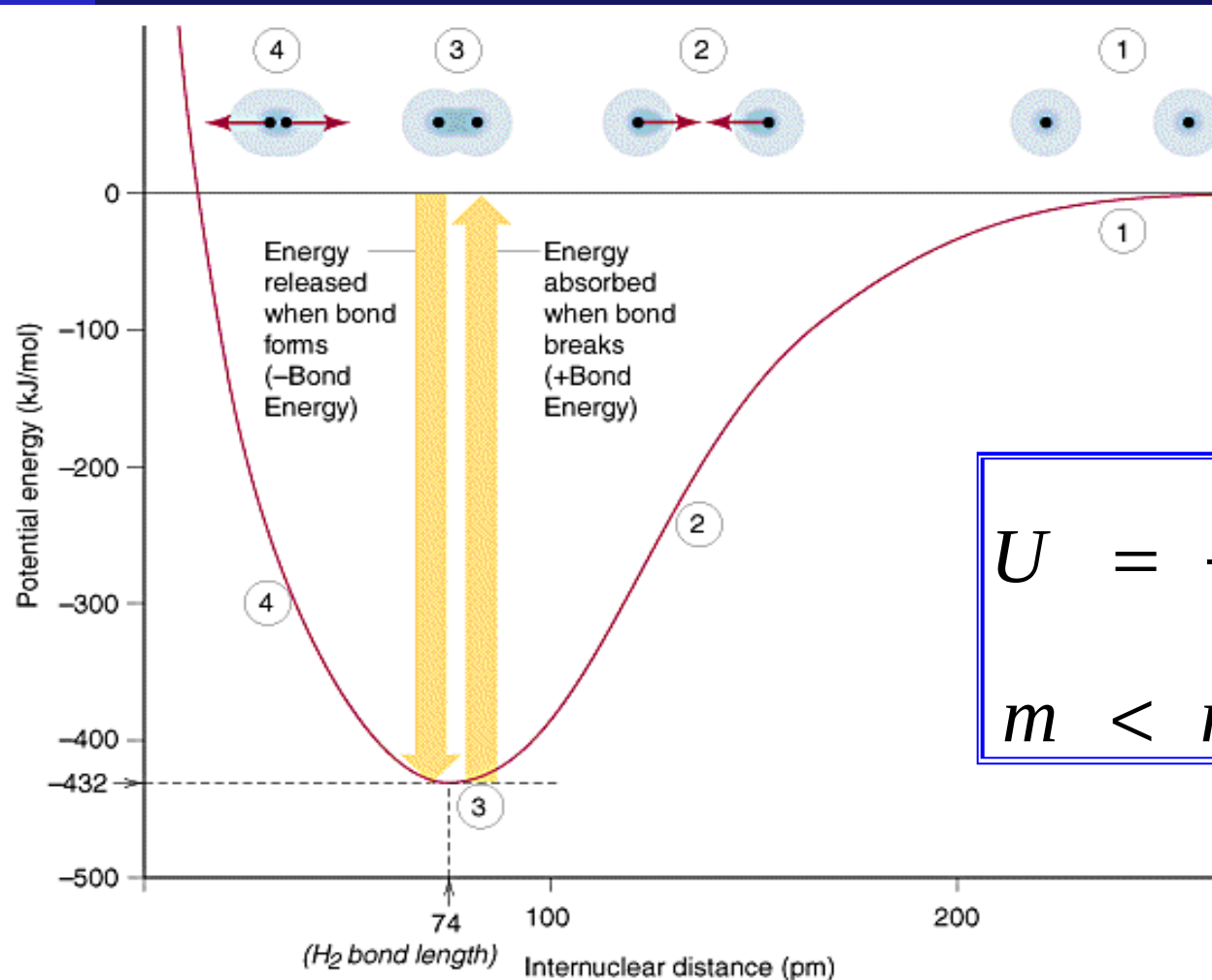


- ✓ Modul pružnosti
- 2) Vazby mezi atomy
- 3) Uspořádání atomů v tuhých látkách
- 4) Fyzikální základ modulu pružnosti
- 5) (Příklad návrhu konstrukce s uvážením elastických deformací)

Vazby mezi atomy

Vazby mezi atomy – primární (T_m 1000K až 5000K)

– sekundární (T_m 100K až 500K)



$$U = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$
$$m < n$$

Vazby mezi atomy

Díky vazbám vzniká kondenzovaný stav látek

Kovová - ionty kovů v moři elektronů,
těsné uspořádání =
největší hustota

Iontová - využití oktaedrických a
tetraedrických poloh

Kovalentní - komplikovaná mřížka, nejpevnější

Vazby mezi atomy

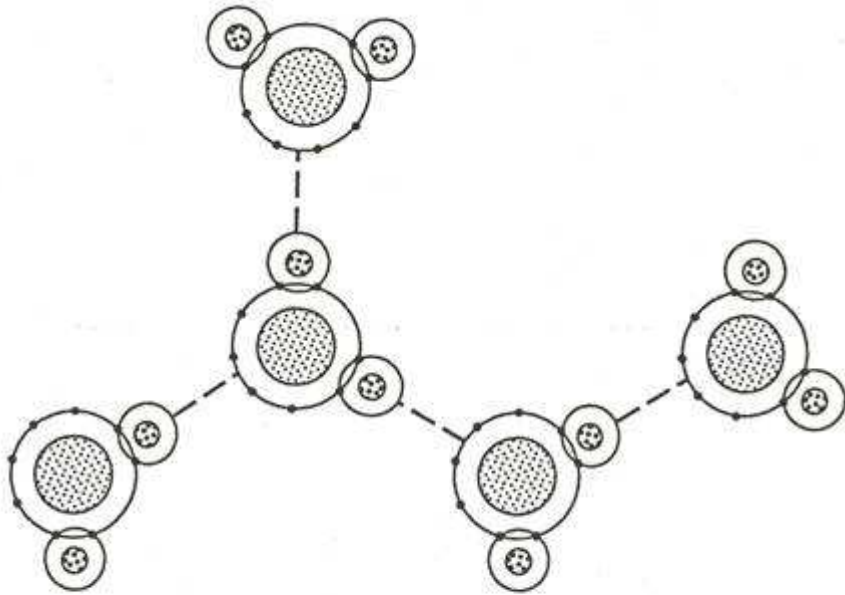
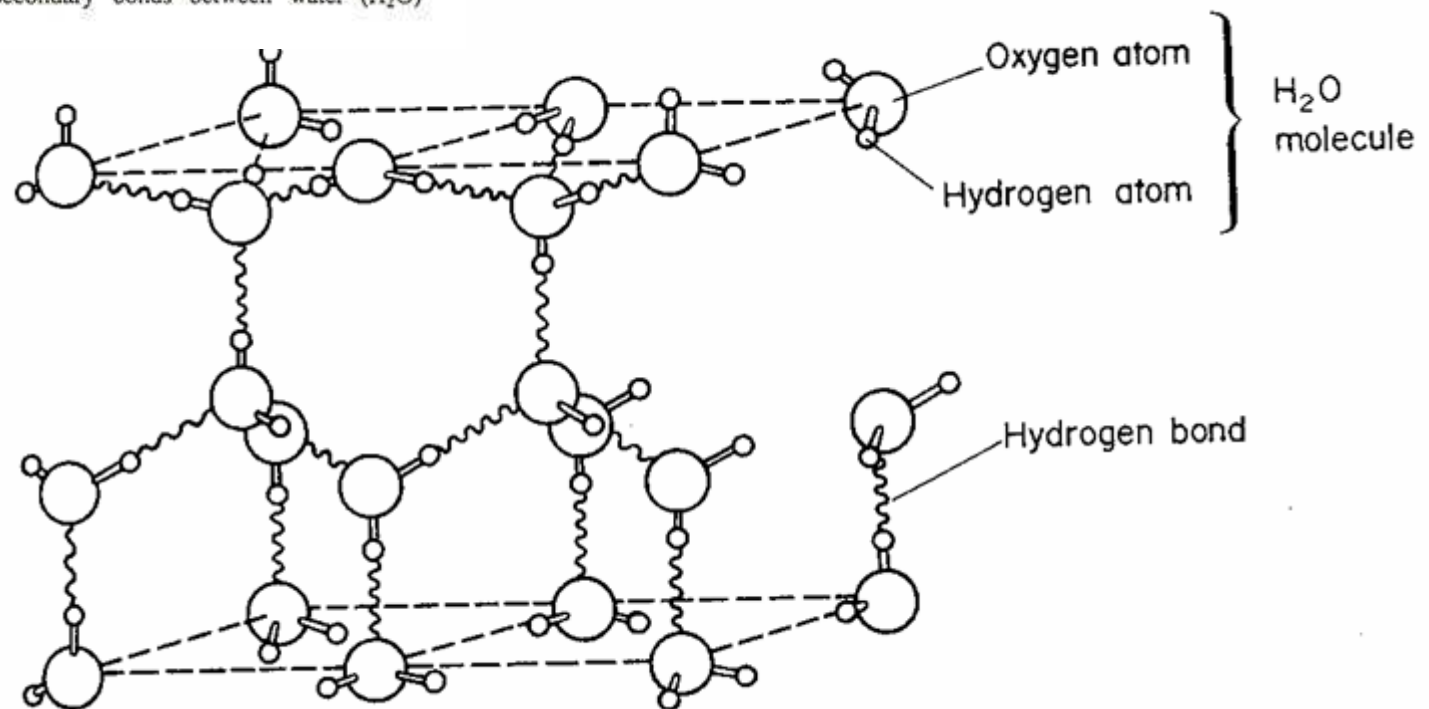


Figure 2.7 Oxygen-to-hydrogen secondary bonds between water (H_2O) molecules.

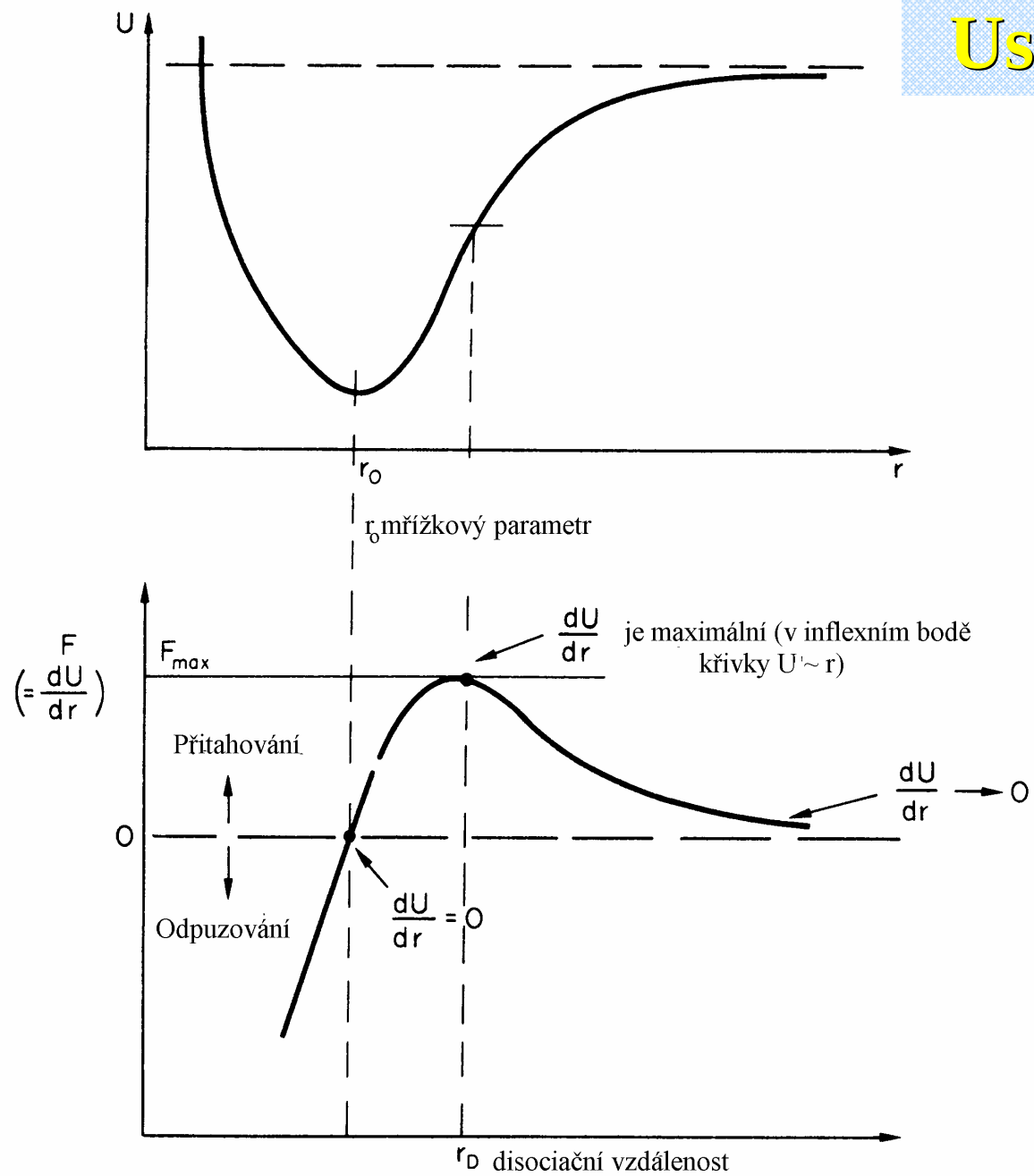


Kondenzované stavy

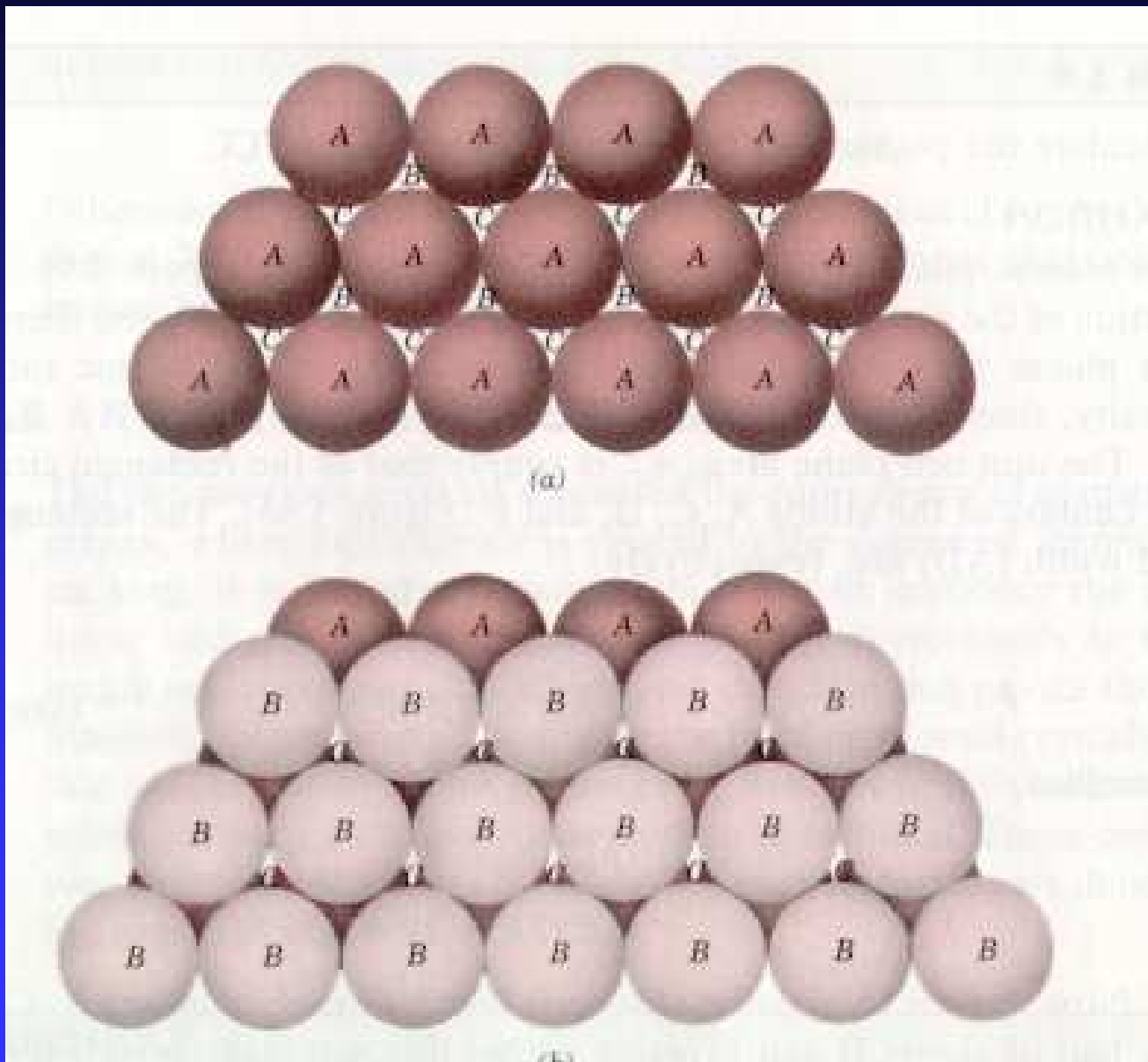
Stav		Vazby		K	E
		Rozrušené	Pevné		
1	Kapalina	*		Velké	Nula
2	Tekutý krystal	*		Velké	Malé $\neq 0$
3	Pryž	Sekundární	Primární	Velké	$E \ll K$
4	Sklo		*	Velké	$E \approx K$
5	Krystal		*	Velké	$E \approx K$

- ✓ Modul pružnosti
- ✓ Vazby mezi atomy
- 3) Uspořádání atomů v tuhých látkách
- 4) Fyzikální základ modulu pružnosti
- 5) (Příklad návrhu konstrukce s uvažováním elastických deformací)

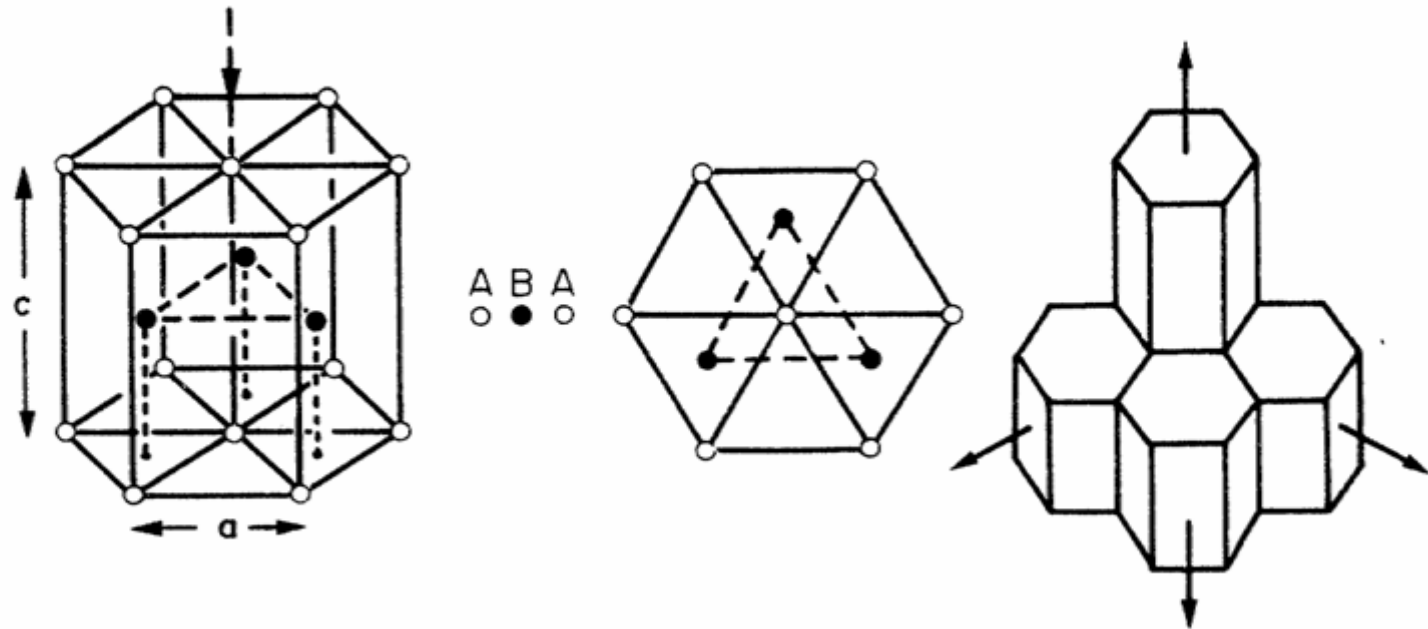
Uspořádání atomů



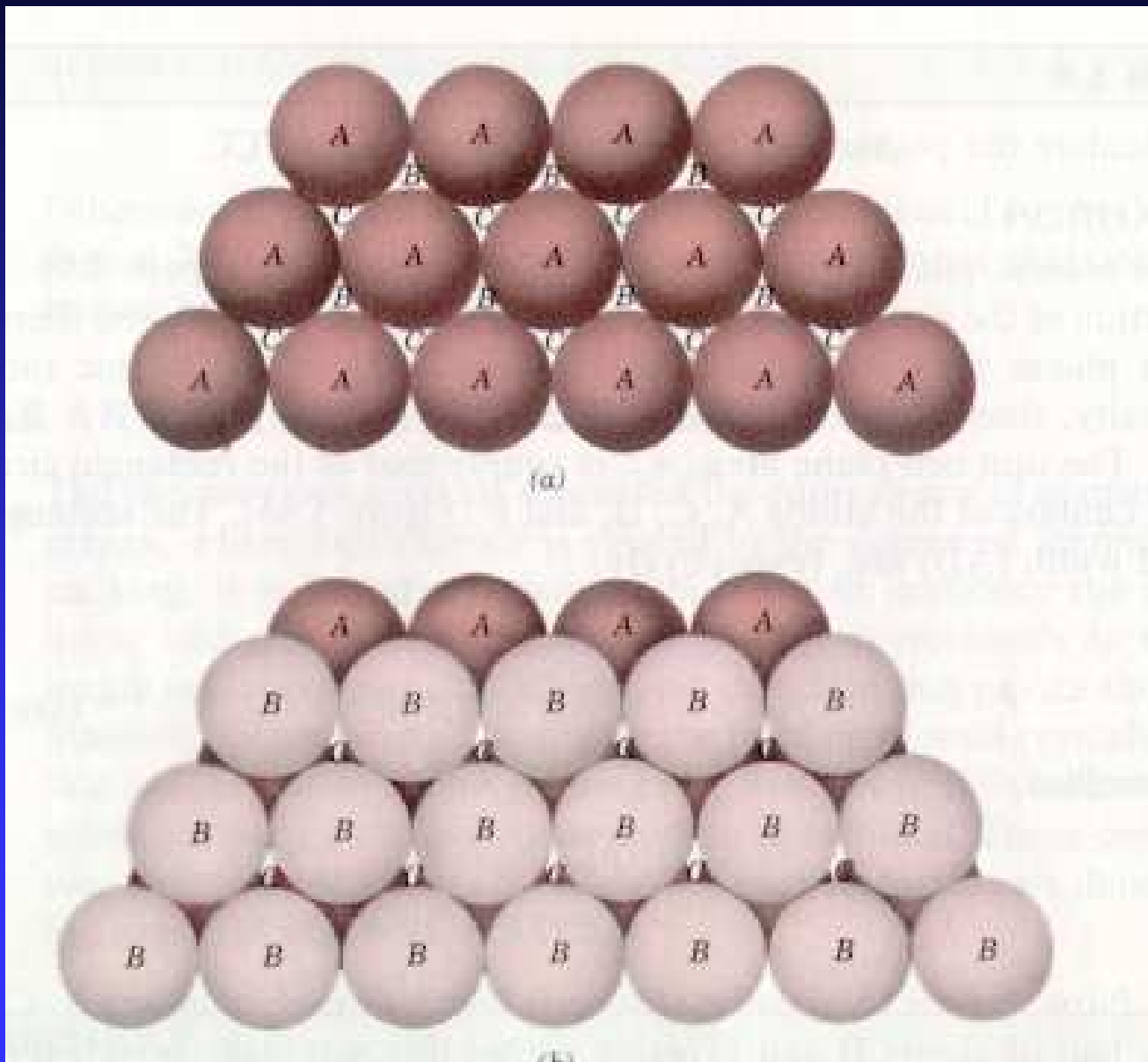
Těsné uspořádání - kovy



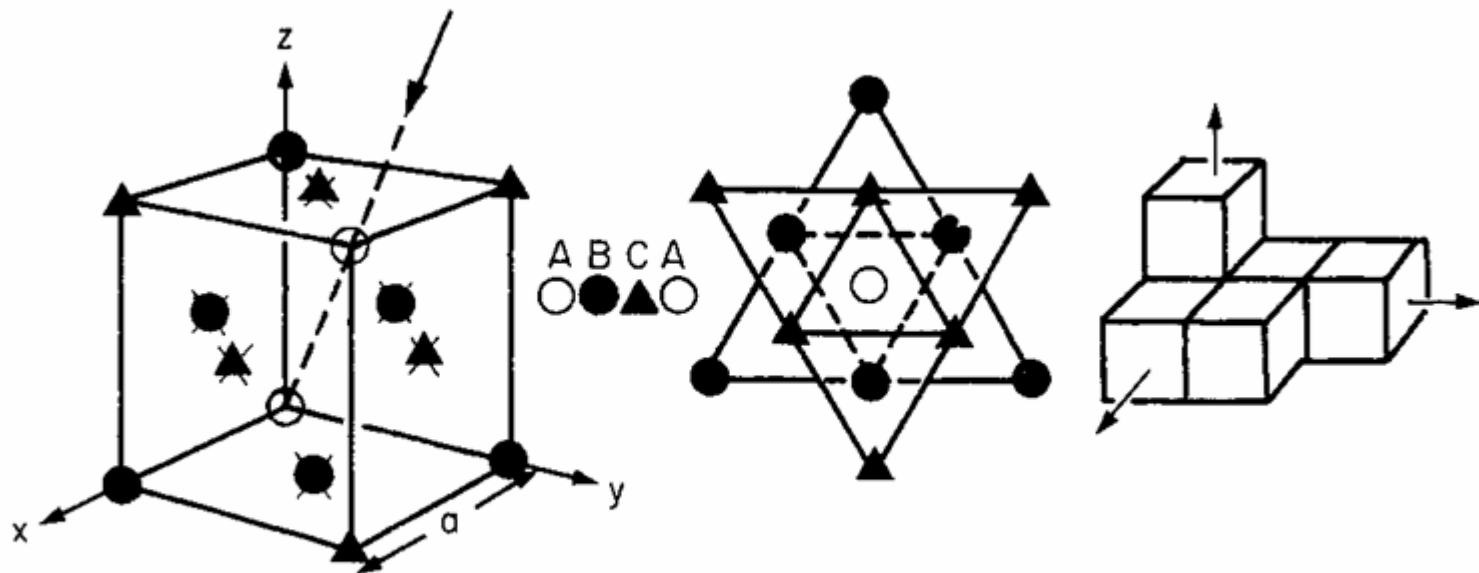
Struktura hcp –Mg, Zn, Co, a - Ti hexagonal - close – packed structure



Těsné uspořádání - kovy

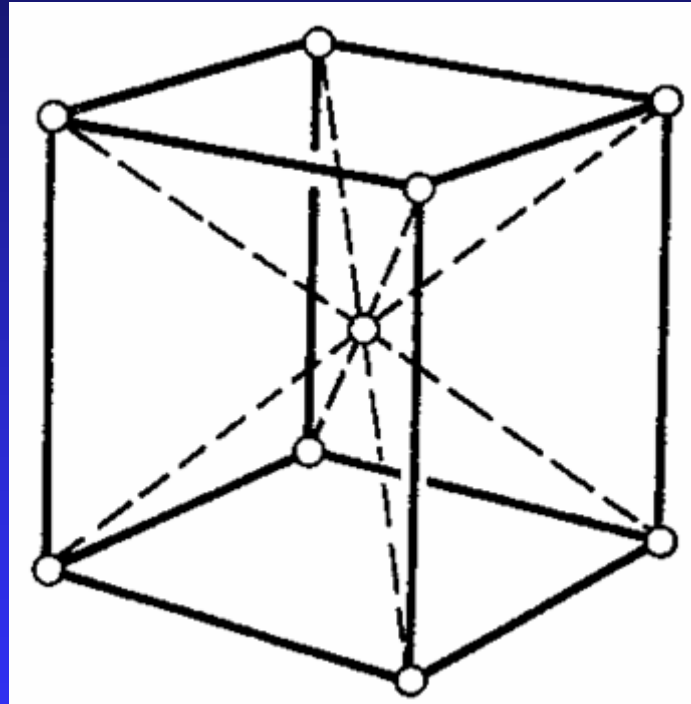


Struktura fcc – Al, Cu, Au, Ag, Pt, Ni, γ -Fe face – centred – cubic structure



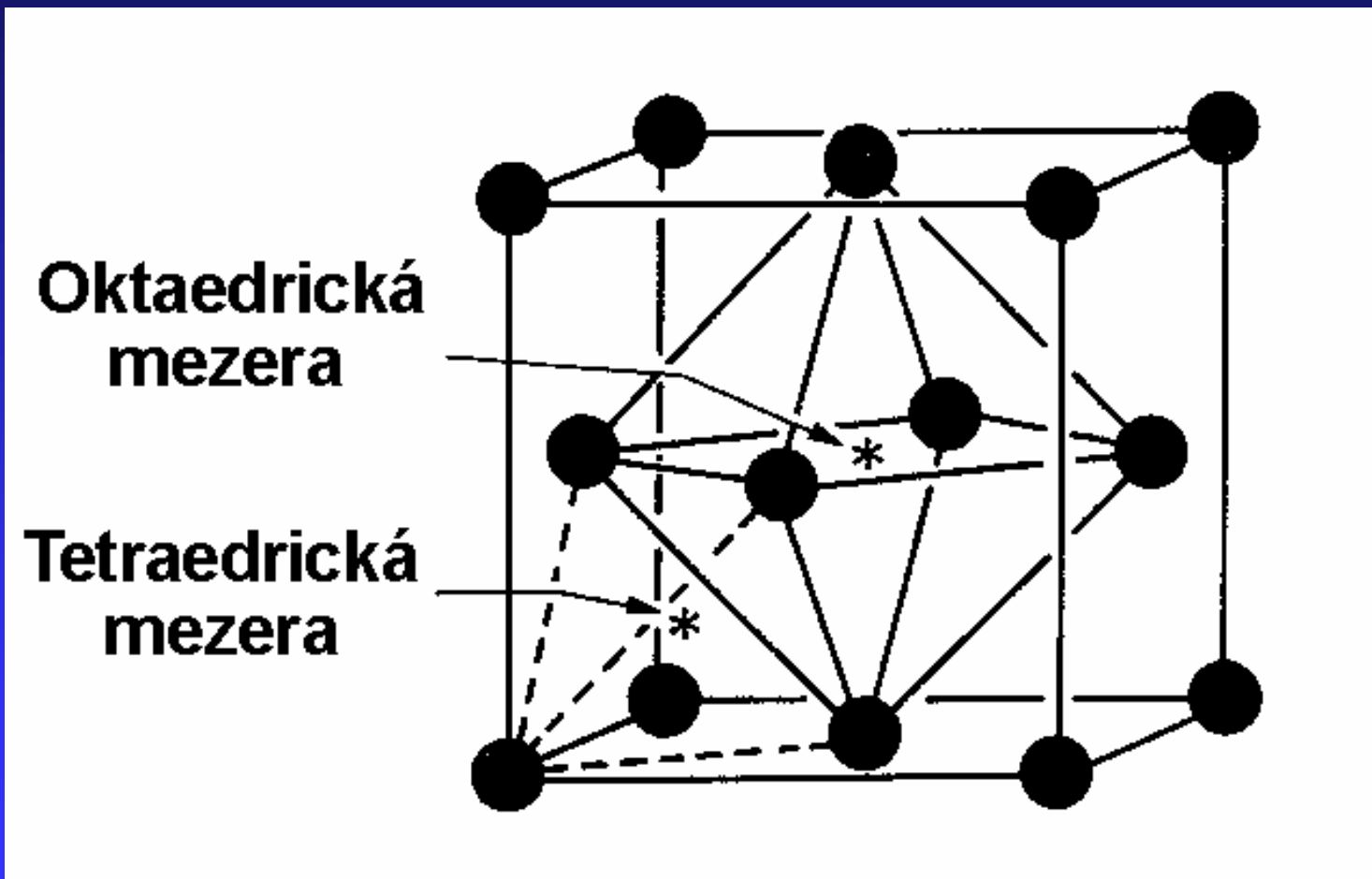
Struktura bcc – α -Fe, Mo, W, Ta

body – centred - cubic structure

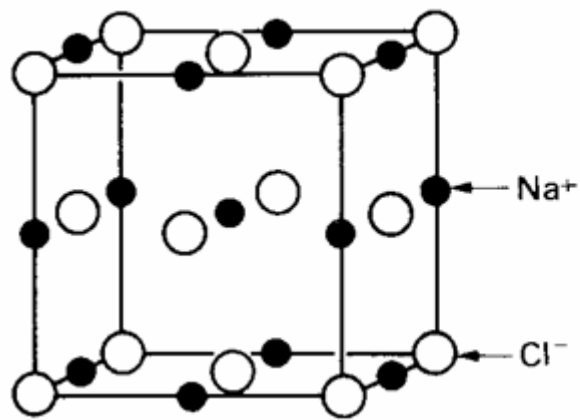


- Polymorfie – změna mřížky s teplotou, železo $\alpha - \gamma - \delta$ (910/1400) $^{\circ}\text{C}$

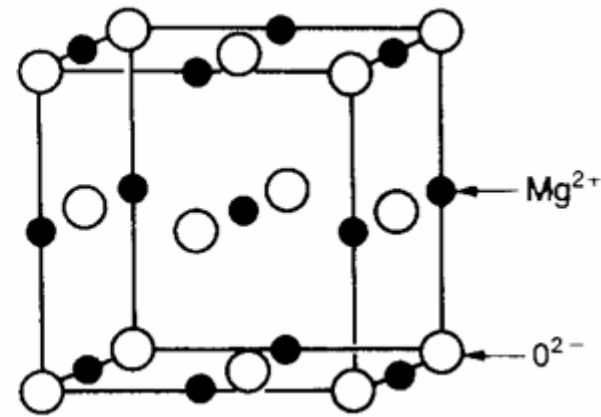
Iontová vazba - keramika



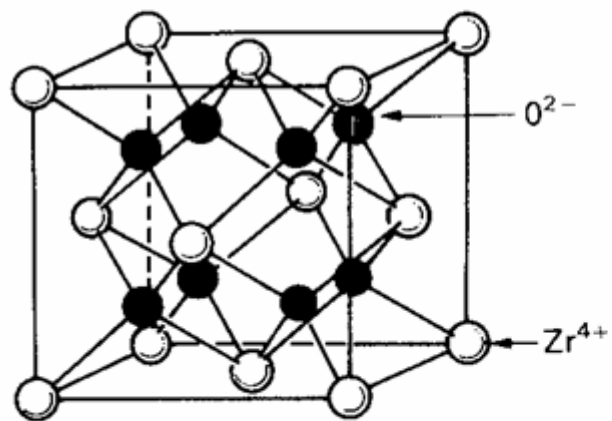
Iontová vazba - keramika



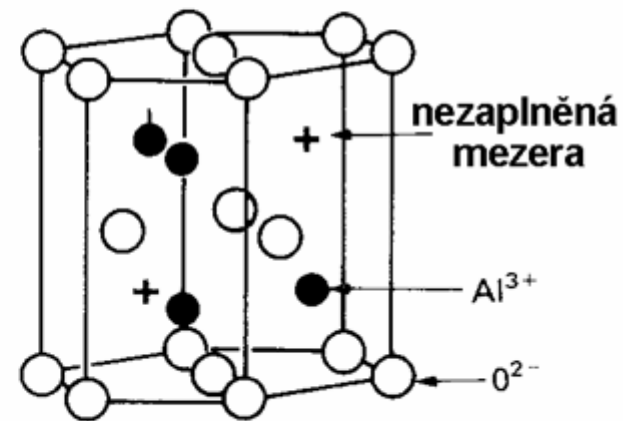
(a)



(b)



(c)



(d)

Kovalentní vazba - keramika

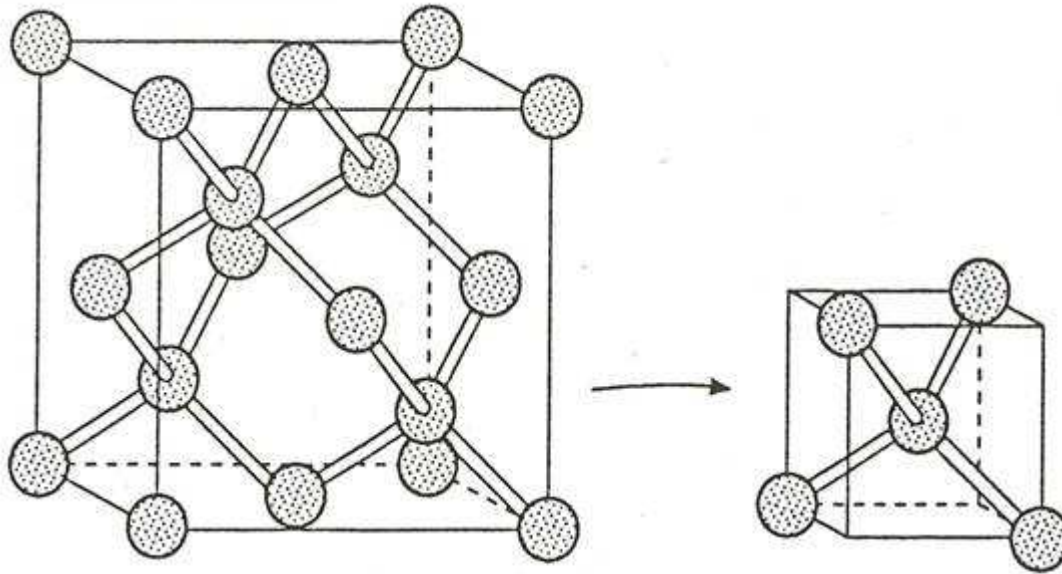
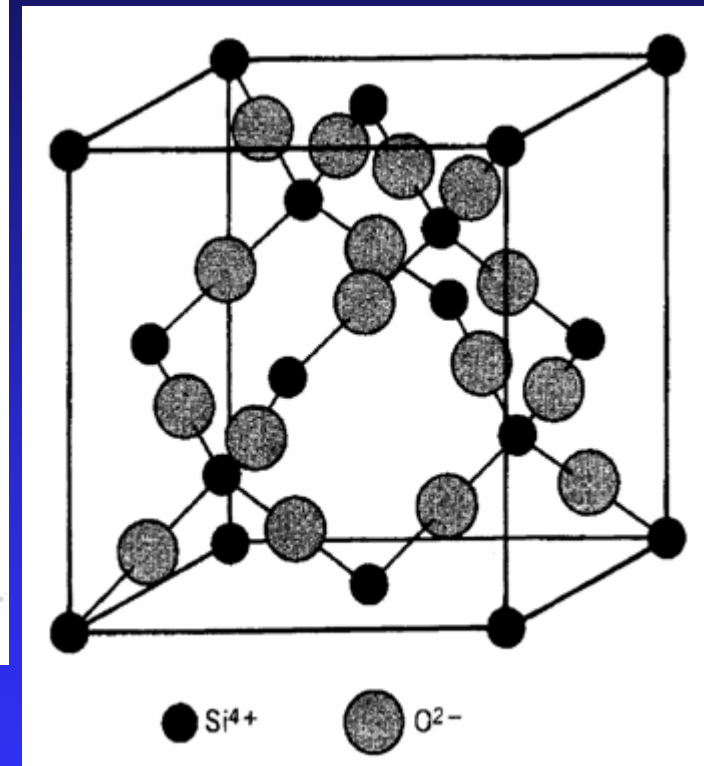


Figure 2.5 Diamond cubic crystal structure of carbon. As a result of the strong and directional covalent bonds, diamond has the highest melting temperature, the highest hardness, and the highest elastic modulus E , of all known solids.

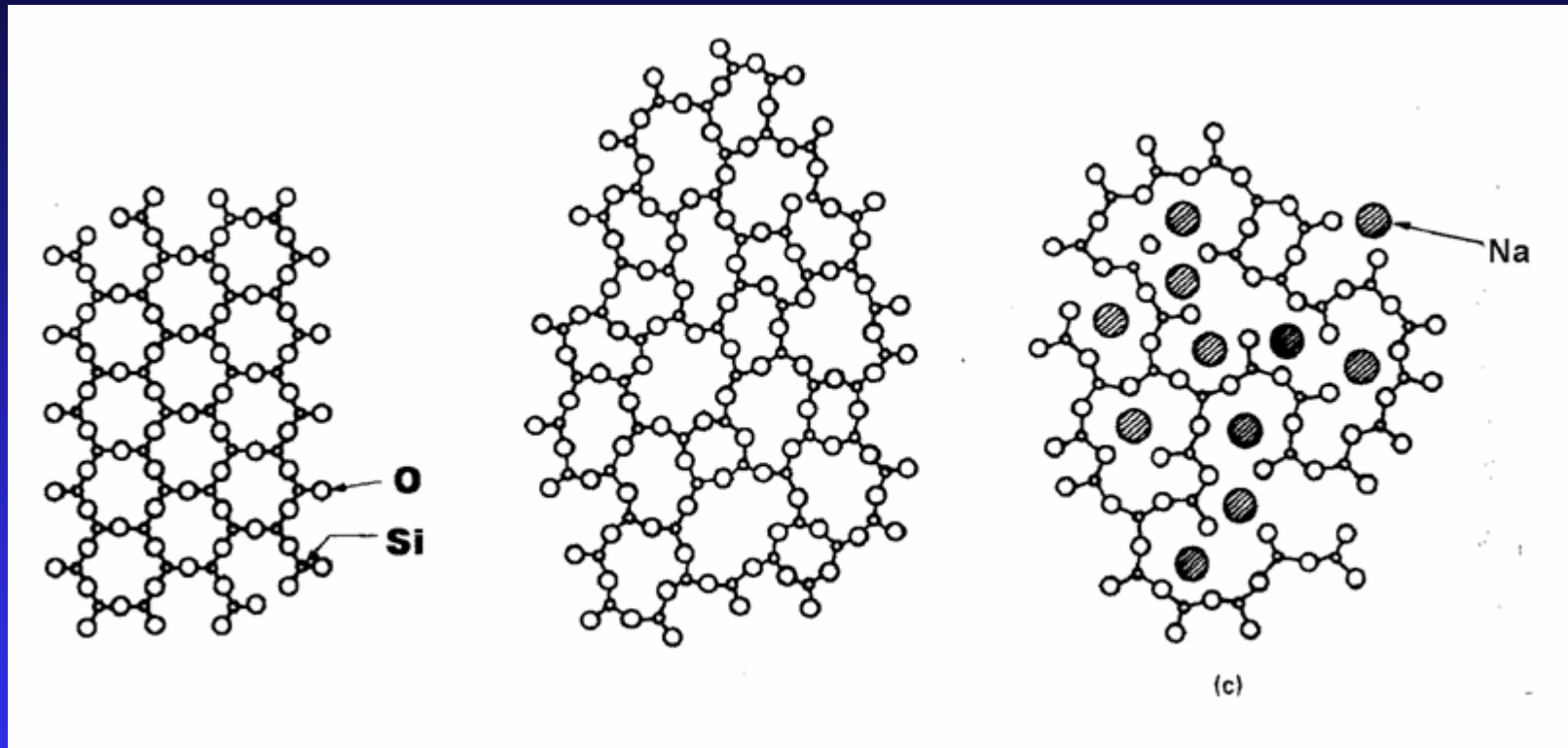
Diamant

Mřížka se vzdaluje od těsného uspořádání



Křemen

Kovalentní vazba - sklo



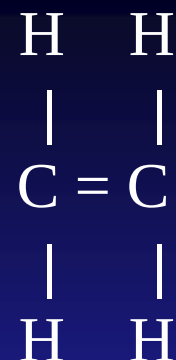
Křemenné sklo – teplota tavení 1200°C

Na, Ca, Fe – terminátoři – 700°C

Kovalentní vazba – polymery (plasty)

- Termoplasty – PE, PP, PS, PMMA
- Termosety (reaktoplasty)
- Elastomery (pryže, gumy)

Etylén



monomér

Počet monomérů (n)	teplota měknutí °C	charakter při +20°C
1	-167	plyn
6	-12	kapalina
35	37	tuk
140	93	vosk
430	109	pevná látka

↓
Stupeň polymerizace $10^3 \approx 10^5$

Polymery (plasty)

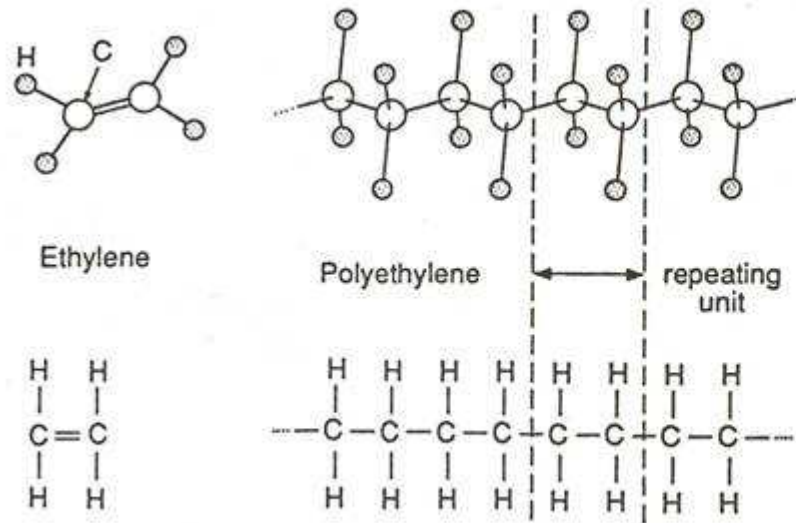
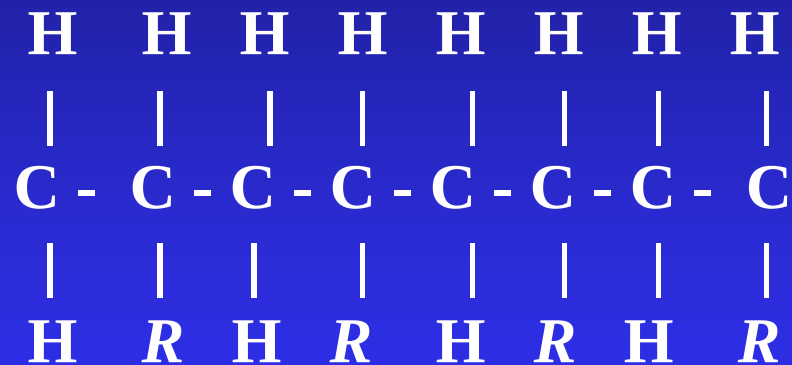


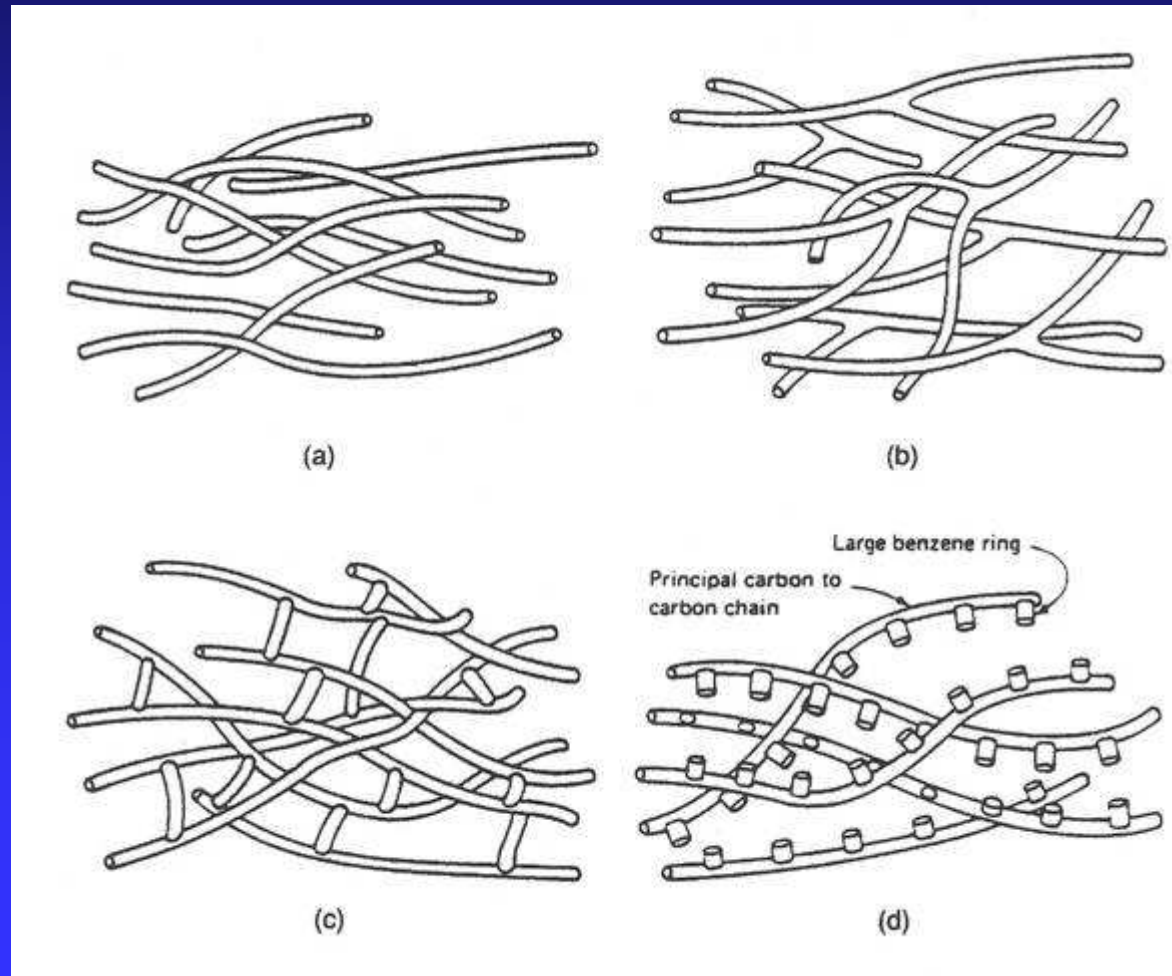
Figure 2.6 Molecular structures of ethylene gas (C_2H_4) and polyethylene polymer. The double bond in ethylene is replaced by two single bonds in polyethylene, permitting formation of the chain molecule.



- | | | |
|----------|----------|--|
| R ---- | H | polyetylén (odpadní trubky, izolatory) |
| R ---- | CH_3 | polypropylén (odolnější vůči světlu, auto) |
| R ---- | Cl | polyvinylchlorid (střešní a podlahové krytiny) |
| R ---- | C_6H_5 | polystyrén (gram desky, příbory, izolace) |

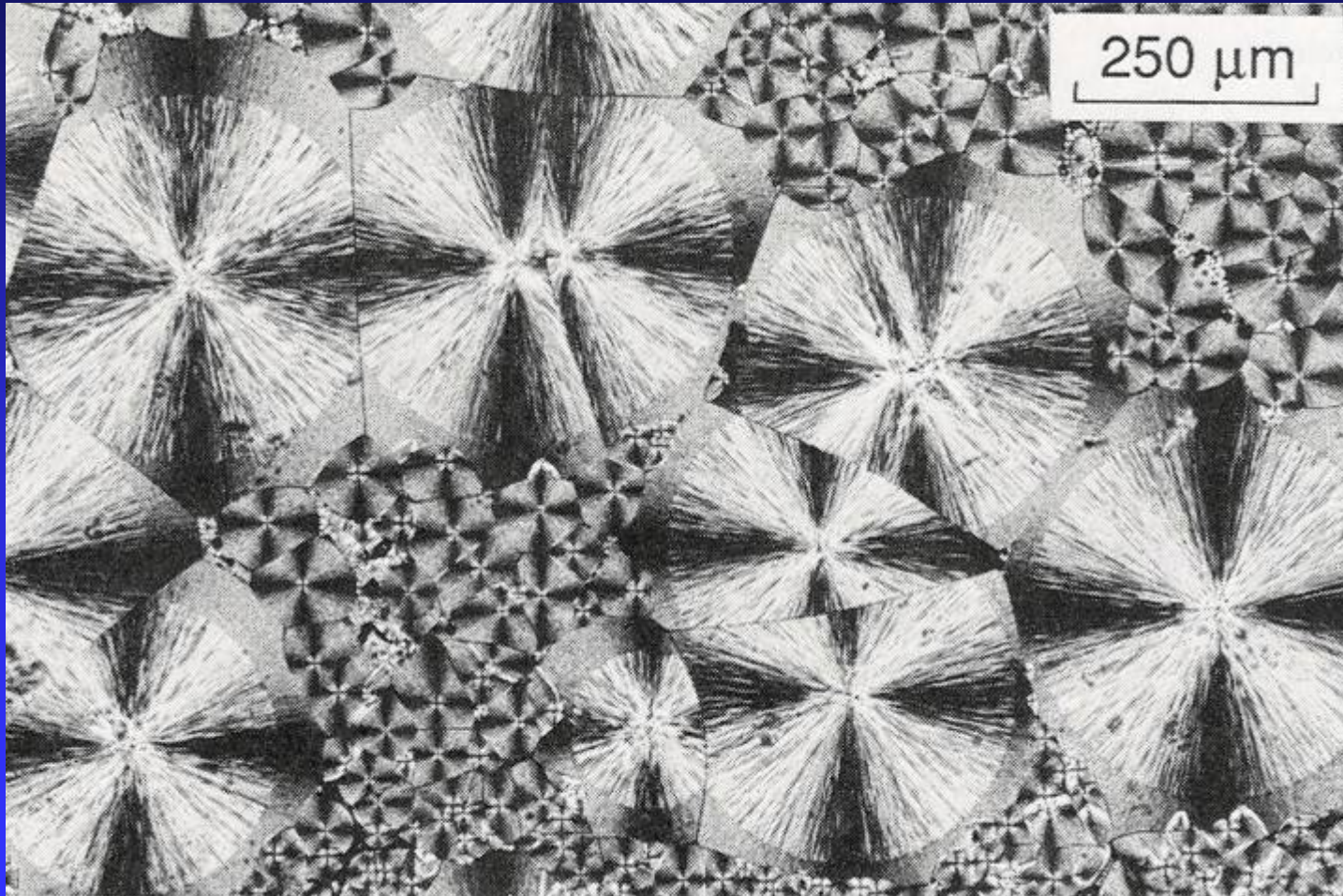
Polymery (plasty)

Tvary molekul plastů



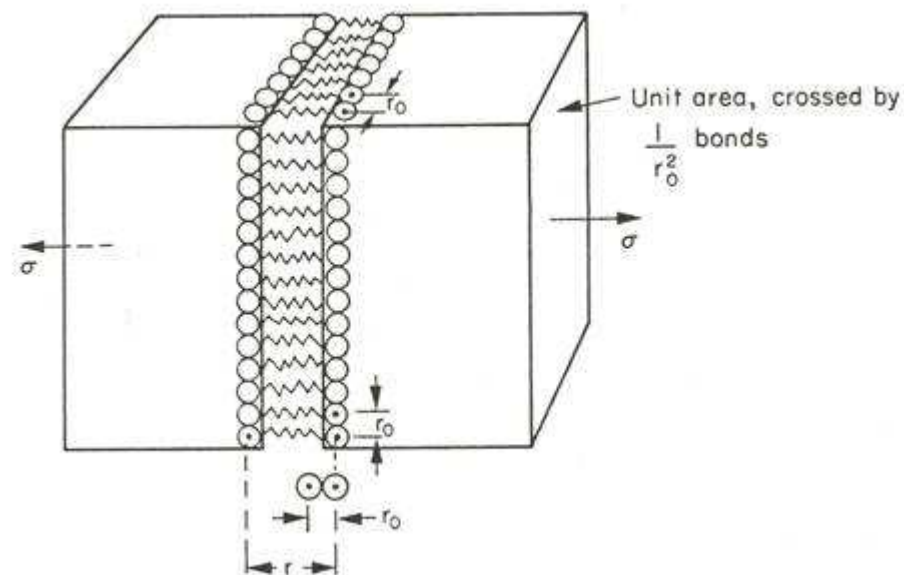
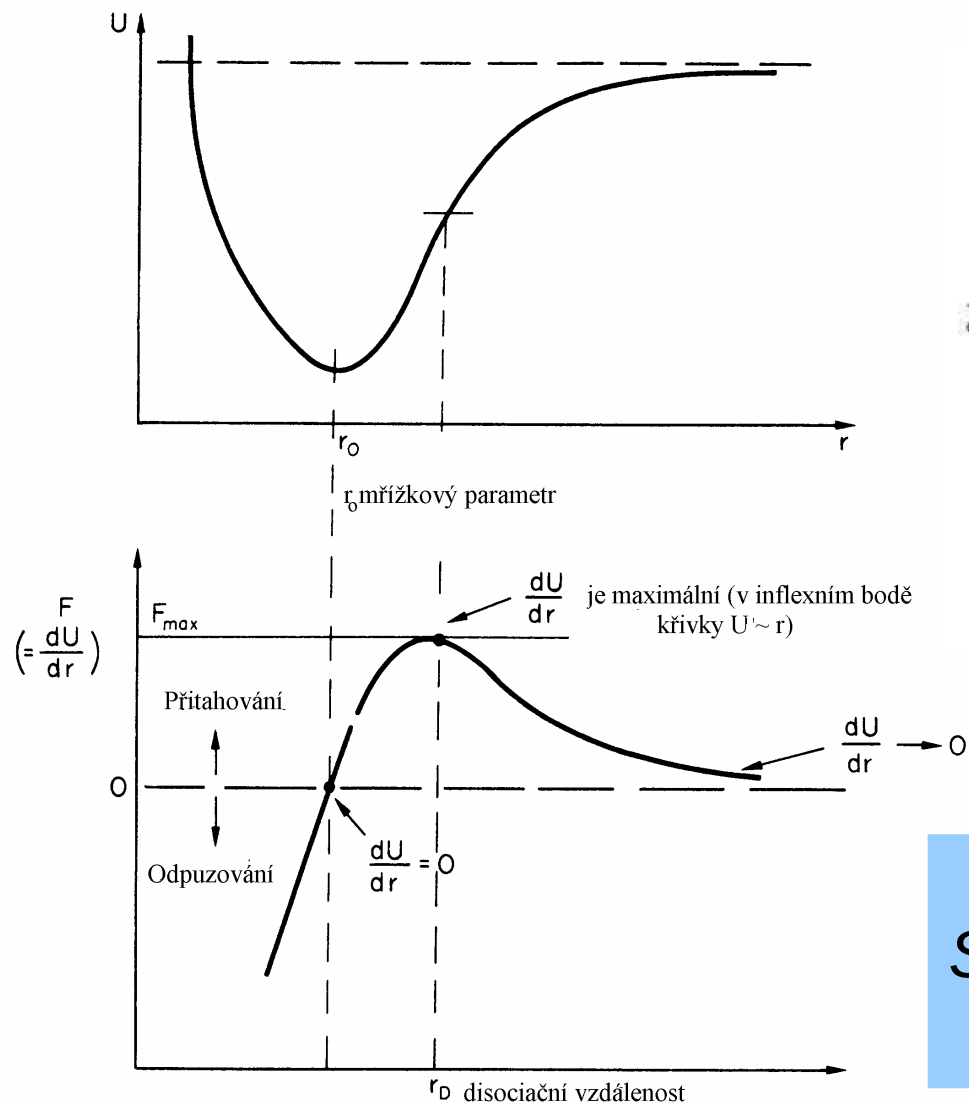
Polymery (plasty)

Krystalny plast - sferolity



- ✓ Modul pružnosti
- ✓ Vazby mezi atomy
- ✓ Uspořádání atomů v tuhých látkách
- 4) Fyzikální základ modulu pružnosti
- 5) (Příklad návrhu konstrukce s uvážením elastických deformací)

Fyzikální podstata modulu pružnosti



tuhost vazby

$$S_0 = \left(\frac{d^2U}{dr^2} \right)_{r=r_0}$$

Tuhost vazby

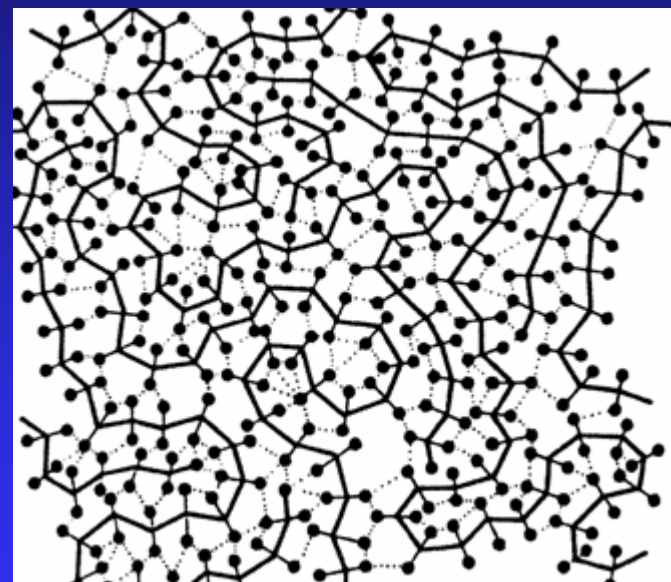
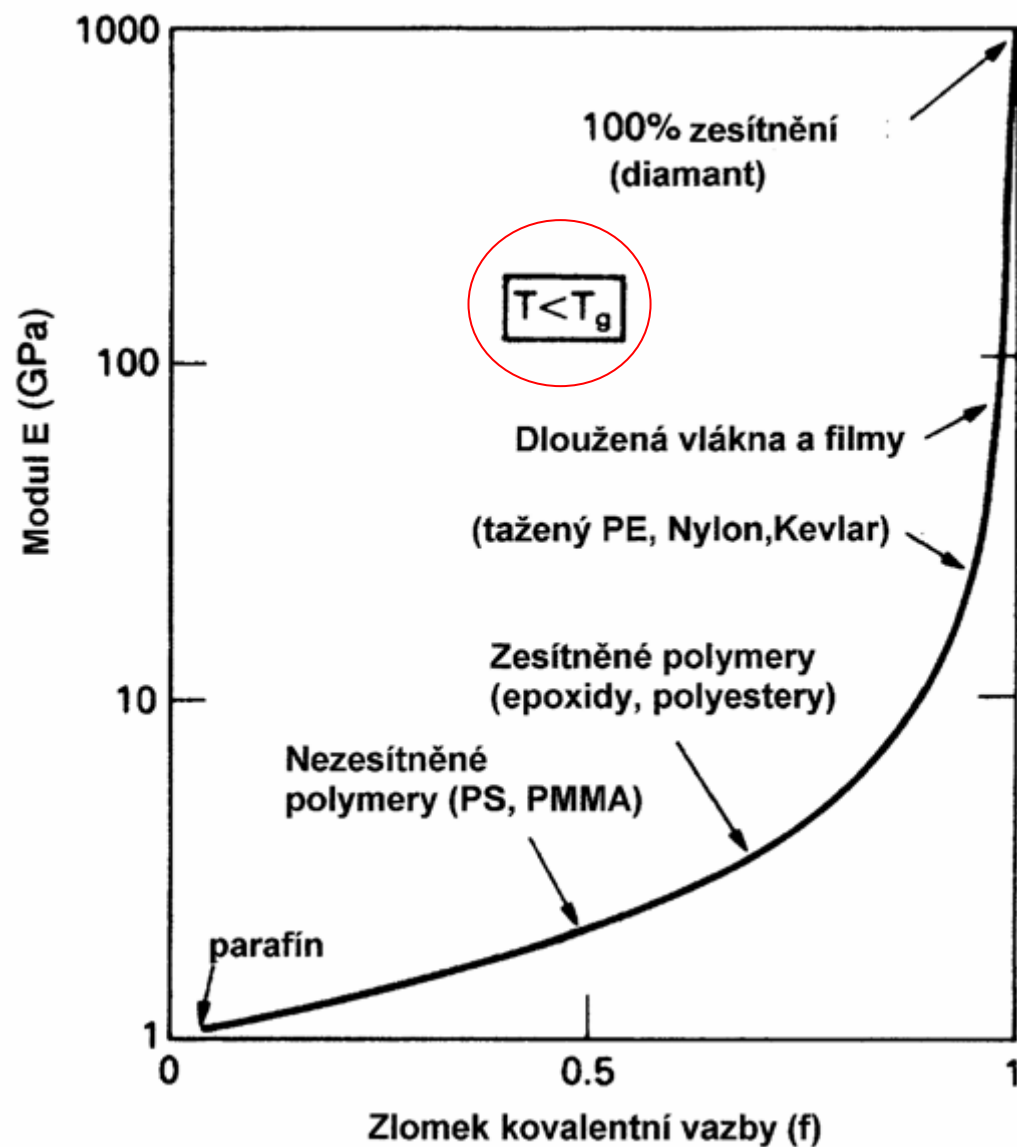
Modul pružnosti

Typ vazby	S_0 [N/m]	$E \approx S_0/r_0$ [MPa]
C-C	180	1 000 000
iontová Na-Cl	9 - 21	(0,3 – 0,7) 100 000
kovová Cu-Cu	15 - 40	(0,3 - 1,5) 100 000
H - můstek	2	8 000
Van der Waals	1	2 000

Teorie platí u kovů a keramiky; modul pružnosti některých plastů (kaučuk, pryž) je až o tři řády nižší ve srovnání s teorií.

Polymery v závislosti na teplotě

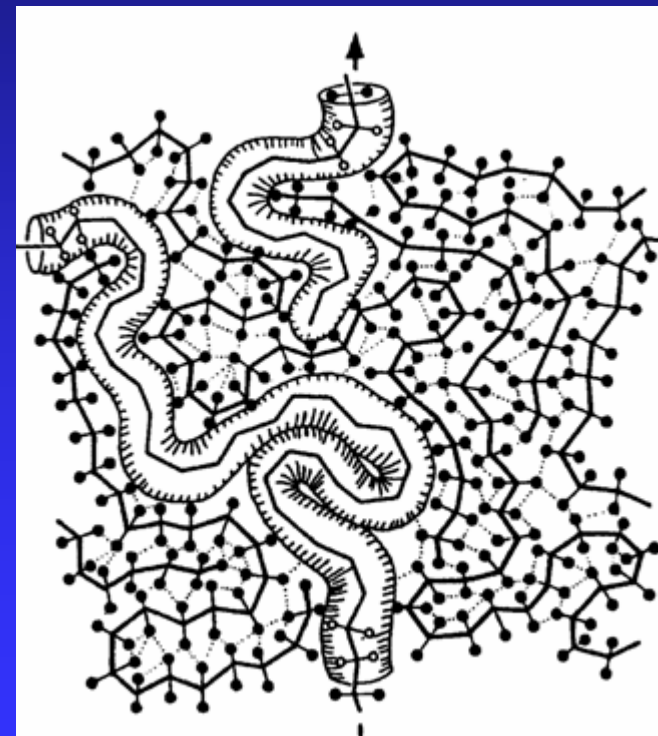
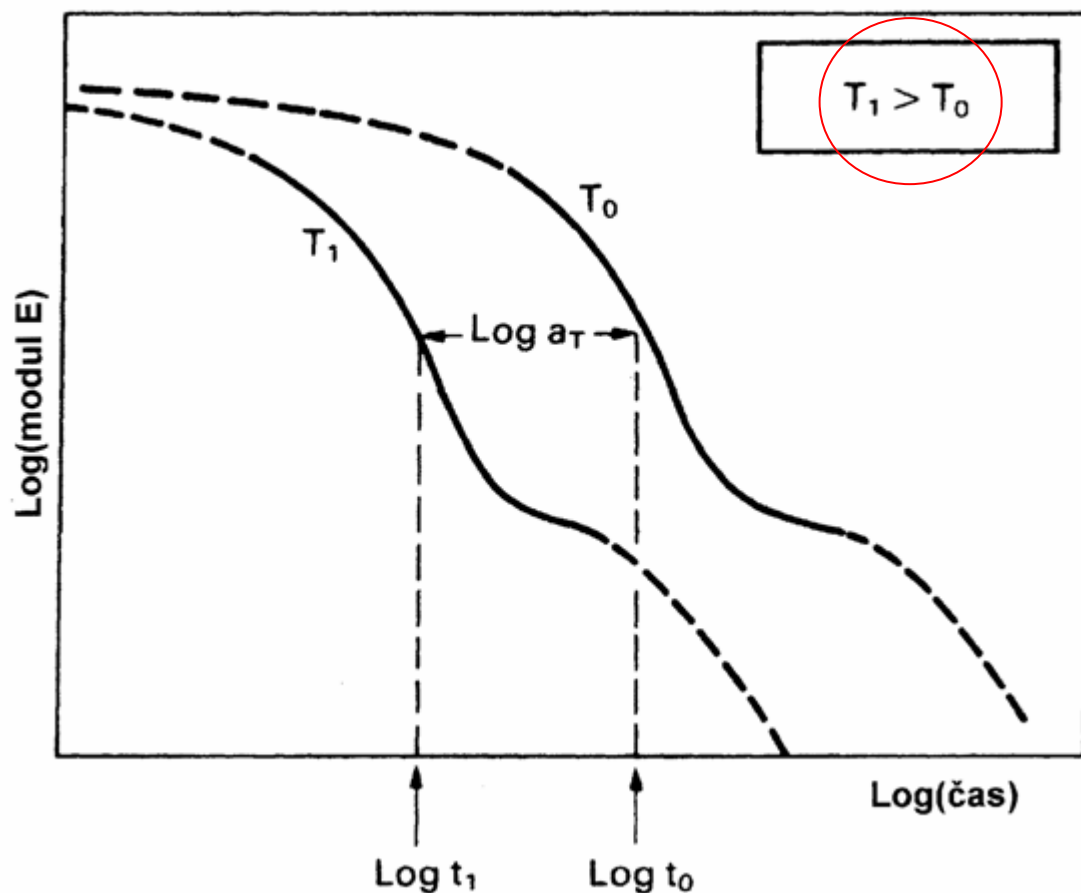
Skelná oblast



Polymery v závislosti na teplotě

Oblast skelného přechodu - T_g

Sekundární vazby začínají tát



Polymery v závislosti na teplotě

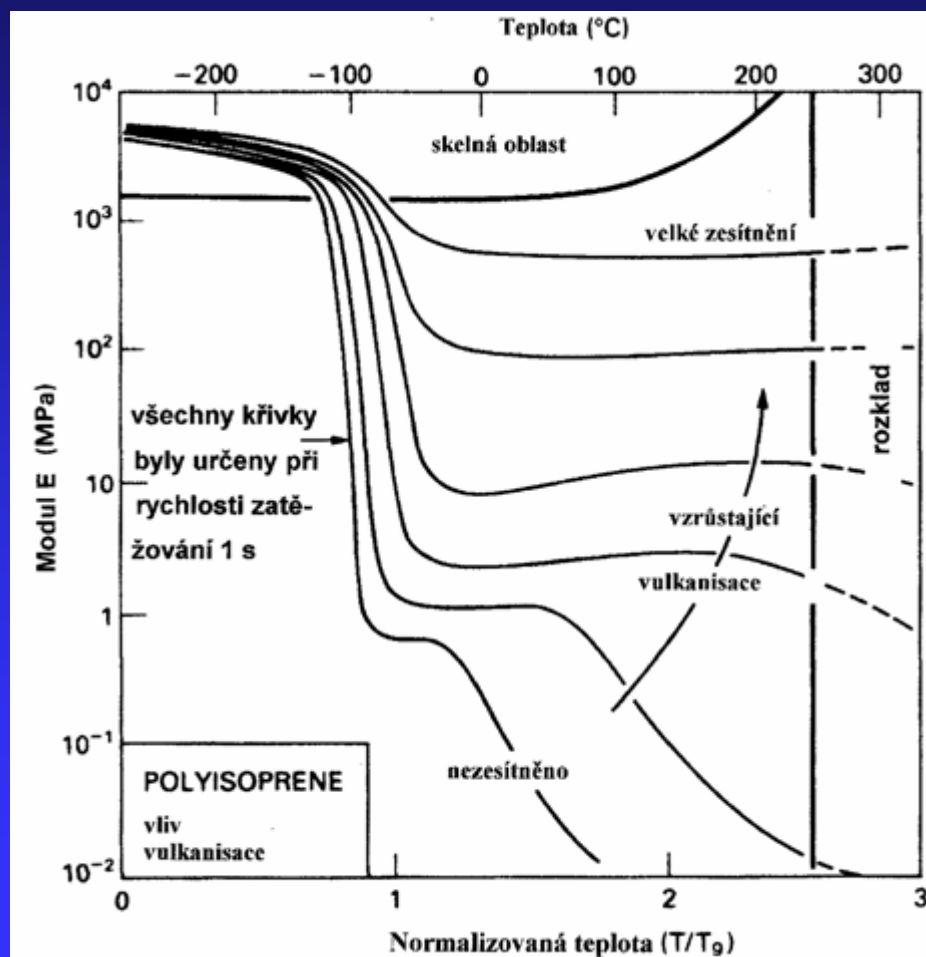
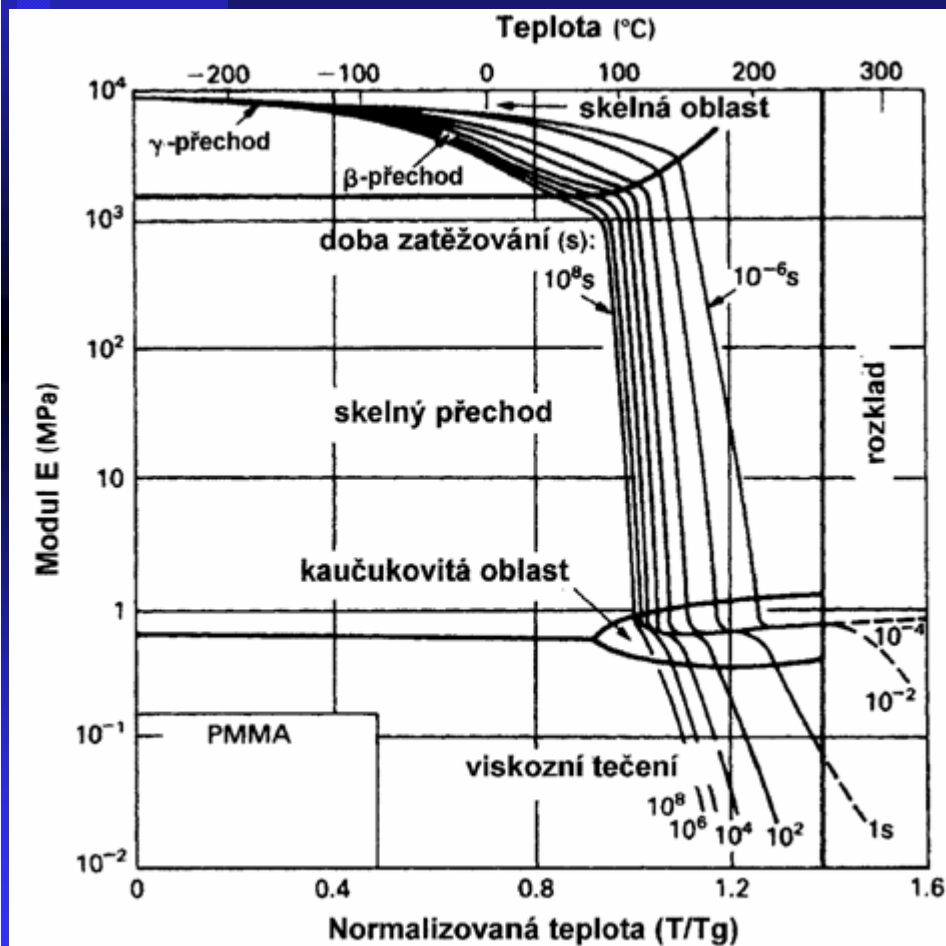
Kaučukovitá oblast

Pryže - pružná deformace, kde $\mu = 0,5$



Polymery v závislosti na teplotě

Příklady teplotní závislosti E



Modul pružnosti kompozitu

Materiál složený ze dvou materiálů,
který má lepší vlastnosti než jednotlivé složky

Částicové kompozity

Polyetylén + živice

WC + Co

SiC + Al

Vláknové kompozity

GFRP – glass fiber reinforcement

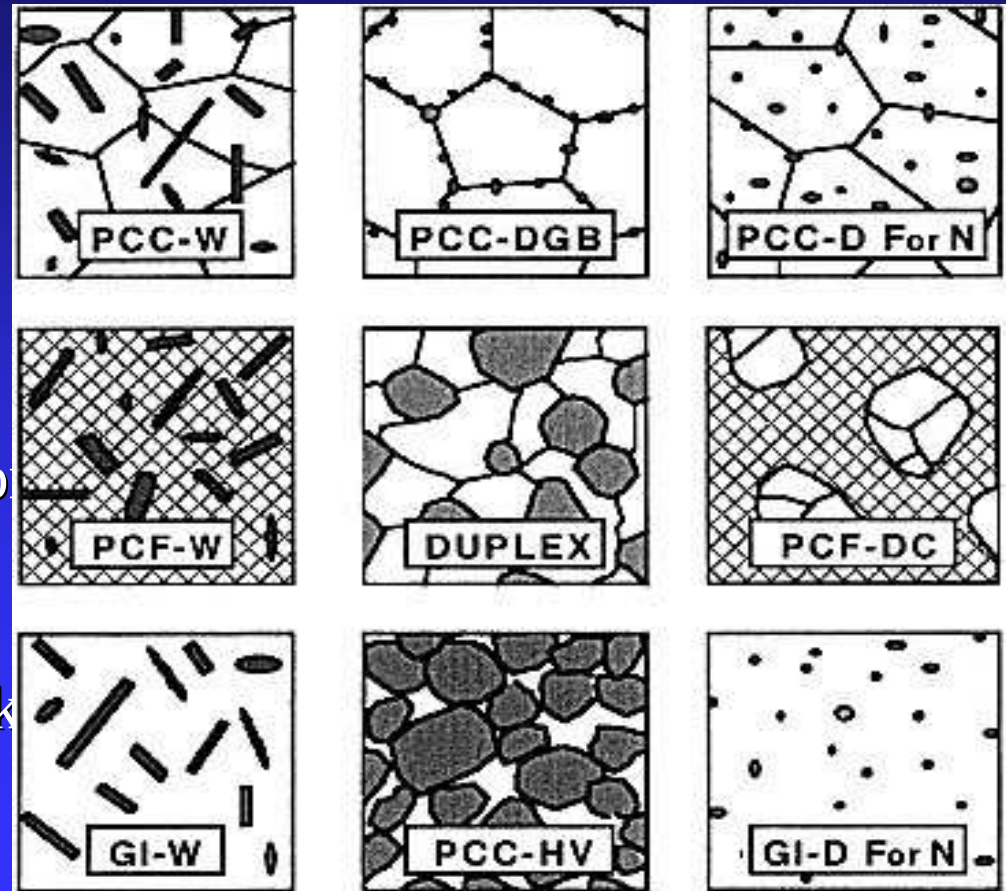
CFRP – carbon

BFRP – boron

Mg + vlákna Al_2O_3 (blokové)

Celulóza + lignin

SiC (Nicalon)/glass



Modul pružnosti kompozitu

napětí působí rovnoběžně s vlákny –
deformace vláken f i matrice m je stejná

Vláknové kompozity

$$\sigma = V_f \cdot \sigma_f + (1 - V_f) \cdot \sigma_m$$

$$\sigma = E_{komp} \cdot \varepsilon = V_f \cdot E_f \cdot \varepsilon + (1 - V_f) \cdot E_m \cdot \varepsilon$$

$$E_{komp} = V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m$$

napětí působí kolmo na vlákna - vlákna i
matrice přenáší stejné napětí

$$\varepsilon = V_f \cdot \varepsilon_f + (1 - V_f) \cdot \varepsilon_m$$

$$\frac{\sigma}{E_{komp}} = V_f \frac{\sigma}{E_f} + (1 - V_f) \frac{\sigma}{E_m}$$

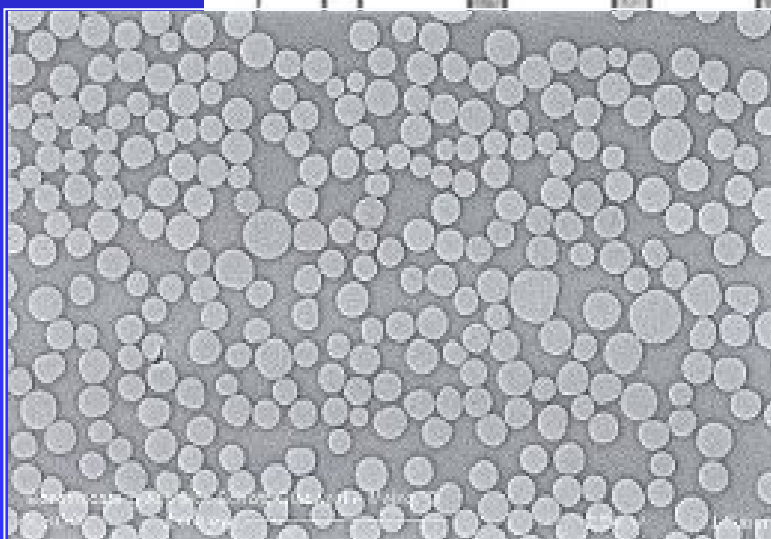
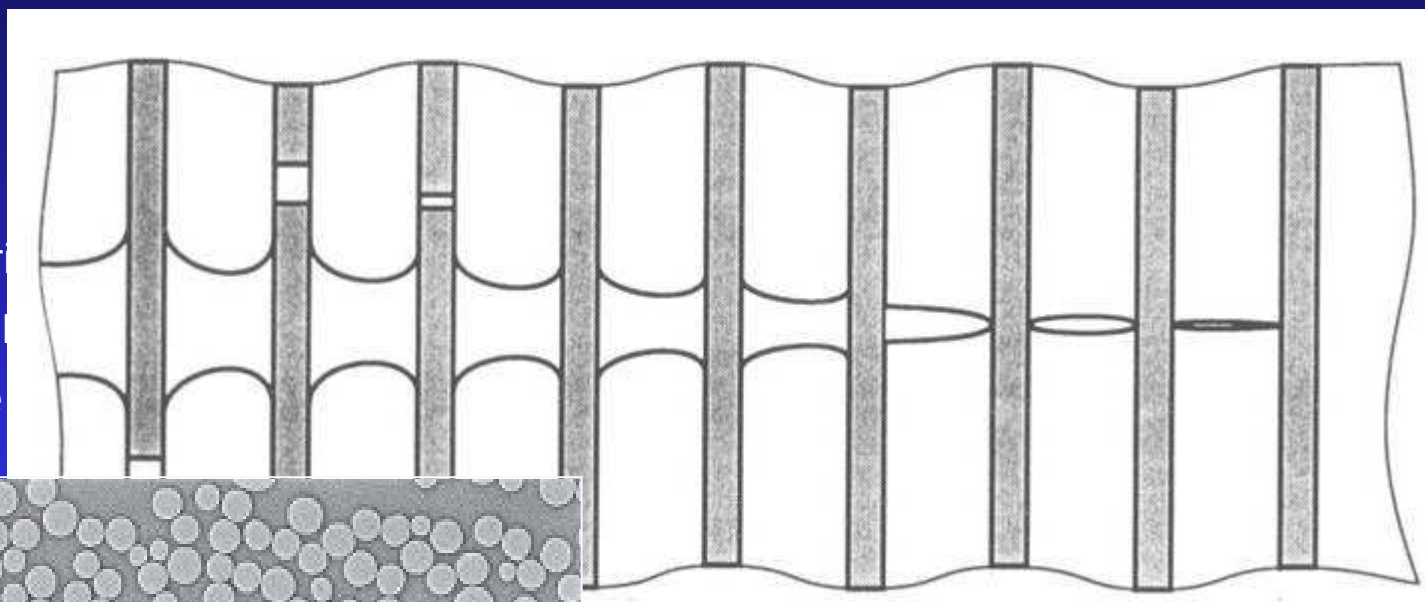
$$E_{komp} = \left\{ \frac{V_f}{E_f} + \frac{(1 - V_f)}{E_m} \right\}^{-1}$$

Skelná matrice s vlákny (Shott Glass Mainz)

borosilikátové sklo (DURAN)

vlákna SiC (NICALON)

Glass matrix
Fibre SiC
Composite



Skelná matrice s vlákny

